

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

TRABALHO DE FORMATURA

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE
MATERIAIS DE PROPAGANDA POR MEIO DE UM MODELO DE
OTIMIZAÇÃO

Trabalho de Formatura Apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a Obtenção de Diploma de Engenheiro de
Produção Área Mecânica

Guilherme Barroso Mainieri

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Débora Pretti Ronconi

2003

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

TRABALHO DE FORMATURA

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE
MATERIAIS DE PROPAGANDA POR MEIO DE UM MODELO DE
OTIMIZAÇÃO

Trabalho de Formatura Apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a Obtenção de Diploma de Engenheiro de
Produção Área Mecânica

Guilherme Barroso Mainieri

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Débora Pretti Ronconi

2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Mainieri, Guilherme Barroso

Resolução de um Problema de Distribuição de Materiais /
Guilherme Barroso Mainieri. – São Paulo, 2003.
103p.

Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de
Produção.

1. Indústria Gráfica e editorial {Distribuição} 2. Pesquisa
Operacional

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Produção II.t.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e a todos que me ensinaram a importância do estudo.

AGRADECIMENTOS

À sociedade que me proporcionou estudar em uma das melhores faculdades do país.

À minha família, pela dedicação, apoio e por tudo que tenho.

À professora Débora, pela orientação, pelo apoio, pelo conhecimento passado e pela motivação dados durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Miguel César Santoro pela ajuda dada.

À Thais Magalhães pela ajuda dada principalmente na definição do tema do trabalho.

Aos funcionários do Anglo que me ajudaram, principalmente à Tatiana Gabriades e à Adriana do Marketing.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Produção pela ajuda na utilização da sala do GOL (Grupo de Operações e Logística).

Aos professores do Anglo, principalmente Sorocaba e Arruda, com os quais eu aprendi Física e coisas da vida que eu jamais esquecerei.

Aos meus colegas Vinicius Canheu e Marcos Leite que me acompanharam, me apoiaram e me ajudaram durante toda a jornada na Universidade. Sem eles eu não teria conseguido.

Aos meus colegas da Engenharia Mecânica Filipe Jerônimo, Fernando Camps, Roberto Lakatos, que me ajudaram durante os meus três primeiros anos na Universidade. Sem eles eu também jamais conseguiria.

Ao Anglo Vestibulares e ao Eduardo Sperling pela ajuda no ingresso na Universidade.

Aos meus amigos, colegas, professores e todos os outros que me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, no ingresso e passagem pela Universidade.

RESUMO

O presente trabalho propõe o emprego de técnicas e ferramentas da pesquisa operacional no processo de definição de itinerários dos veículos de entrega de materiais de propaganda de um curso pré-vestibular, Anglo Vestibulares, da cidade de São Paulo.

O problema presente atualmente na empresa consiste na dificuldade de se definir os itinerários dos veículos de uma maneira empírica de tal maneira que se amplie o número de clientes atendidos e se respeite a limitação de tempo de distribuição.

Para ajudar a empresa a superar tal dificuldade, o trabalho propõe a aplicação de um método científico para a definição dos itinerários dos dois veículos disponíveis na empresa.

Para a aplicação do processo de resolução do problema foi utilizada uma adaptação do modelo proposto em “A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing” (FISHER e JAIKUMAR [8]) e técnicas de otimização.

A análise dos resultados obtidos mostrou uma redução nos custos por material divulgado, o que comprovou que a metodologia aplicada realmente pode auxiliar a empresa no seu processo de decisão.

ABSTRACT

The present work considers the application of operation research techniques and tools in the scheduling definition process of delivery vehicles of advertising materials for a pre-university course, Anglo Vestibulares, in the city of São Paulo.

The company current problem is the difficulty of defining empirically the itineraries of the vehicles, in such way that would both increase the number of customers and respect the limitation of time distribution.

To help the company to surpass such difficulty, the work considers the application of a scientific method for the itineraries definition of the two available vehicles in the company.

An adaptation of the model considered in “A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing” (FISHER e JAİKUMAR [8]) and the usage of optimization techniques were applied for the problem resolution process

The analysis of the results showed a reduction in the costs for divulged material, what proved that the applied methodology can assist the company in its decision process.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| Introdução | 1 |
| O Estágio | 2 |
| 1. Definição do Problema e Objetivo do Trabalho | 4 |
| 1.1 Apresentação da Empresa | 4 |
| O Curso Pré-Vestibular | 4 |
| A Gráfica | 5 |
| A Empresa Hoje | 7 |
| 1.2 O Material Transportado em Estudo | 7 |
| 1.3 Definição do Problema | 10 |
| As Escolas | 11 |
| A Distribuição | 12 |
| 1.4 Objetivo do Trabalho | 15 |
| 2. Revisão da Literatura | 16 |
| 2.1 A Pesquisa Operacional | 16 |
| 2.2 Problema de Roteamento de Veículos (PRV) | 18 |
| Complexidade do Problema de Roteamento de Veículos | 20 |
| 3. Modelo de Resolução | 23 |
| Requisitos do Modelo | 23 |
| 3.1 Descrição do Modelo | 25 |
| Descrição de Variáveis e Parâmetros | 27 |
| Formulação | 29 |
| Detalhamento do Modelo | 29 |
| 3.2 Adaptação do Modelo | 41 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.3 | Exemplo para Adaptação do Modelo | 43 |
| 3.4 | Dificuldades Encontradas na Construção do Modelo | 45 |
| 4. | Resolução do Problema | 49 |
| 4.1 | Levantamento dos Parâmetros | 49 |
| | Número de clientes e Número de Veículos | 49 |
| | Matriz de Distâncias | 50 |
| | Demandas dos Colégios e Capacidade dos Veículos | 52 |
| 4.2 | Construção Genérica do modelo | 53 |
| | As Variáveis | 54 |
| | A Função Objetivo | 54 |
| | As Restrições | 54 |
| 5. | Obtenção e Análise de Resultados | 57 |
| 5.1 | Construção do Modelo para a Configuração Atual | 57 |
| 5.2 | Construção do Modelo para a Configuração Proposta | 63 |
| | As Variáveis | 63 |
| | A Função Objetivo | 63 |
| | As Restrições | 63 |
| 5.3 | Experimentos Preliminares | 67 |
| 5.4 | A Saída do Modelo | 71 |
| 5.5 | Comparações: Atual e Proposto | 76 |
| | Análise dos Itinerários: Atual e Proposto | 78 |
| | Objetivo Alcançado | 79 |
| | Análises Finais | 80 |
| 6. | Conclusão | 84 |

| | |
|--------------|----|
| Bibliografia | 86 |
| ANEXOS | 89 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| <i>Figura 2-1: Metodologia da Pesquisa Operacional. Fonte: ELLENRIEDER [7]</i> | 17 |
| <i>Figura 3-1 : Situação inviável para a restrição 2</i> | 31 |
| <i>Figura 3-2: Primeira situação inviável para a restrição 3.</i> | 32 |
| <i>Figura 3-3: Segunda situação inviável para a restrição 3</i> | 33 |
| <i>Figura 3-4: Situação inviável para a restrição 4</i> | 34 |
| <i>Figura 3-5: Situação inviável para a restrição 6</i> | 36 |
| <i>Figura 3-6: Solução Possível</i> | 40 |
| <i>Figura 3-7: Comparação entre os Modelos Escolhido e Adaptado</i> | 42 |
| <i>Figura 5-1 : Ilustração para subrotas de dois e três clientes</i> | 69 |
| <i>Figura 5-2: Ilustração para subrota de três clientes</i> | 70 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| <i>Tabela 1-1: Dados da segunda fase do Vestibular da Fuvest 2003</i> | 10 |
| <i>Tabela 1-2: Escolas da Grande São Paulo. Fonte: vestibular da Fuvest 2003</i> | 11 |
| <i>Tabela 1-3 : Dados referentes ao vestibular de 2003</i> | 12 |
| <i>Tabela 1-4: Itinerário para o Último Ano</i> | 13 |
| <i>Tabela 2-1 : Comparação de funções polinomiais e exponenciais da complexidade do tempo. Fonte: GAREY e JOHNSON [10]</i> | 21 |
| <i>Tabela 3-1: Definição do índices</i> | 27 |
| <i>Tabela 3-2: Definição dos parâmetros</i> | 27 |
| <i>Tabela 3-3: Definição de Variáveis</i> | 28 |
| <i>Tabela 3-4: Exemplo para a diferença entre os modelos</i> | 44 |
| <i>Tabela 3-5: Quantidade de restrições de subrotas para 18 escolas</i> | 46 |
| <i>Tabela 3-6: Número de Restrições de subrotas por número de clientes</i> | 47 |
| <i>Tabela 4-1: Listagem simplificada das escolas a serem atendidas. Fonte: Site da Fuvest</i> | 50 |
| <i>Tabela 4-2: Matriz de Distâncias Completa. Fonte: Site Apontador</i> | 51 |
| <i>Tabela 4-3: Comparação entre as distancias obtidas (Apontador) e medidas.</i> | 51 |
| <i>Tabela 4-4: Matriz de Distâncias, fonte: site Apontador</i> | 52 |
| <i>Tabela 4-5: Demandas e Capacidades fornecidos pelo Anglo</i> | 53 |
| <i>Tabela 4-6: Nomes e especificações das matrizes genéricas</i> | 55 |
| <i>Tabela 5-1: Itinerário Atual</i> | 58 |
| <i>Tabela 5-2: Matrizes para a Configuração Atual</i> | 59 |
| <i>Tabela 5-3: Itinerário Atual Encontrado</i> | 60 |
| <i>Tabela 5-4: Comparação: Atual Encontrado e Atual</i> | 61 |
| <i>Tabela 5-5: Nomes e especificações das matrizes.</i> | 64 |
| <i>Tabela 5-6: Números de Entrada e a Saída, elaborada pelo autor</i> | 66 |

| | |
|---|----|
| <i>Tabela 5-7: Solução da matriz de variáveis Y_{ik}</i> | 72 |
| <i>Tabela 5-8: Solução da matriz de variáveis X_{ij} para $k=1$</i> | 73 |
| <i>Tabela 5-9: Solução da matriz de variáveis X_{ij} para $k=2$</i> | 73 |
| <i>Tabela 5-10: Saída da Matriz Objetivo</i> | 74 |
| <i>Tabela 5-11 : Saída da Matriz de Capacidades</i> | 75 |
| <i>Tabela 5-12 : Itinerário proposto</i> | 76 |
| <i>Tabela 5-13 : Itinerários Atual e Proposto</i> | 77 |
| <i>Tabela 5-14 : Comparação: Proposto e Atual</i> | 81 |
| <i>Tabela 5-15: Novas Quantidades de Material Estocado</i> | 83 |
| <i>Tabela 0-1: Dados para Teste de Hipótese</i> | 92 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|--|----|
| <i>Gráfico 1-1 : Material Estocado (Fuvest 2003)</i> | 9 |
| <i>Gráfico 3-1: Número de Restrições de subrota por número de clientes</i> | 47 |
| <i>Gráfico 5-1: Diferença Percentual Entre os Modelos Atual e Proposto</i> | 82 |
| <i>Gráfico 5-2: Novas Quantidades de Material Estocado</i> | 83 |

LISTA DE ANEXOS

| | |
|--|-----------|
| <i>Anexo A – Lista de Locais de Exame da Segunda Fase Fornecida pela Fuvest ..</i> | <i>89</i> |
| <i>Anexo B - Lista de Escolas a serem atendidas.....</i> | <i>91</i> |
| <i>Anexo C -Teste de Hipótese de Dados Emparelhados</i> | <i>92</i> |
| <i>Anexo D: Relatório para a Solução Atual Encontrada</i> | <i>94</i> |
| <i>Anexo E: Relatório para a Solução Proposta.....</i> | <i>95</i> |
| <i>Anexo F - Algoritmo Completo em Linguagem de VBA, elaborado pelo autor. ..</i> | <i>96</i> |

LISTA DE ABREVIATURAS

CVRD - Companhia Vale do Rio Doce

ECA – Escola de Comunicações e Artes

EJOR - *European Journal of Operations Research*

FUVEST - Fundação Universitária para o Vestibular

GOL - Grupo de Operações e Logística

PRV - Problema de Roteamento de Veículos

UNIP – Universidade Paulista

UNIBAN – Universidade Bandeirante de São Paulo

USP – Universidade de São Paulo

VBA - *Visual Basic Application*

VRP - *Vehicle Routing Problem*

WB – *What's Best*

Introdução

A tomada de decisão, de acordo com GOLDBARG e LUNA [12], pode ser entendida, de maneira simplificada, como um processo em que, dentre várias alternativas possíveis, escolhe-se a mais adequada para o alcance de determinado objetivo. Em muitas empresas essa escolha é feita de forma empírica, ou seja, baseada apenas na experiência de determinado indivíduo ou grupo, sem nenhum modelo científico.

A competição cada vez mais acirrada no mercado tem levado as empresas a buscar o aperfeiçoamento de todos os seus processos em seus mínimos detalhes, inclusive o de tomada de decisão. A área de Pesquisa Operacional destaca-se, então, fornecendo ferramentas de caráter científico de apoio à tomada de decisão. Sua aplicação pode ser vantajosa ao permitir a modelagem das inter-relações entre um grande número de variáveis que dificilmente seriam visíveis e compreendidas intuitivamente.

Além disso o desenvolvimento de softwares específicos nessa área, juntamente com o aumento da capacidade de processamento dos computadores, tornou viável o emprego da técnica em empresas de menor porte e na resolução de problemas mais simples sem a necessidade de grandes investimentos.

Assim como outras empresas de serviços, os cursos pré-vestibulares se encontram inseridos no contexto de competição e pressão de um mercado cada vez mais exigente. Desta forma a aplicação de técnicas de pesquisa operacional em alguns de seus processos decisórios pode resultar em uma vantagem competitiva significativa.

Neste contexto, este trabalho propõe a utilização de técnicas e ferramentas da pesquisa operacional na área de transporte de materiais de propaganda do curso pré-vestibular Anglo. Com isto podem-se evitar custos e recursos desnecessários

e ainda aumentar a divulgação dos serviços da empresa que é de fundamental importância

O objetivo do trabalho será, portanto, encontrar uma solução factível que vise a otimização de um processo decisório: a alocação de materiais nos meios de transporte e a redefinição de itinerários de entrega do material ao menor custo possível.

O Estágio

A empresa citada é o local onde o autor trabalhou durante três anos como professor de Física. As principais funções exercidas eram:

- ✚ Instruir os alunos dando complemento às aulas através do esclarecimento das possíveis dúvidas dos alunos referentes à aula, teoria e tarefas;
- ✚ Lecionar como professor em aulas complementares, substituições e seminários, estes últimos faziam parte do programa de treinamento dos professores e o tema era explanado apenas para os professores iniciantes a respeito de diversos assuntos de Física e Engenharia;
- ✚ Elaborar e acompanhar as impressões das resoluções (Anglo Resolve) das provas dos principais vestibulares do Estado de São Paulo;
- ✚ Corrigir e elaborar erratas do caderno de questões utilizado pelos alunos do curso;
- ✚ Corrigir os simulados feitos pelos alunos.

O trabalho foi dividido em seis capítulos, que representam as etapas de desenvolvimento do mesmo. O primeiro capítulo foi dedicado à apresentação da empresa, relatando brevemente a sua história, descrevendo suas principais atividades. Segue ainda no mesmo capítulo, a apresentação do problema abordado, ou seja, o transporte de materiais de propaganda pelo curso pré-

vestibular Anglo e o objetivo do trabalho. O capítulo 2 dedica-se á revisão da literatura, descrevendo a pesquisa operacional e os problemas de roteamento de veículos. No capítulo 3 é apresentado o modelo de resolução escolhido. O capítulo 4 relata todo o processo de resolução do problema, começando com o levantamento dos parâmetros seguido pela construção do modelo. O quinto capítulo mostra a obtenção e análise dos resultados por meio de gráficos e tabelas comparativas. O último capítulo apresenta a conclusão do trabalho.

1. Definição do Problema e Objetivo do Trabalho

Neste capítulo será descrito o problema a ser solucionado, bem como o objetivo do trabalho.

A primeira parte apresentará a empresa na qual o projeto será desenvolvido, ou seja, o curso pré-vestibular Anglo (Simão e Gabriades Vestibulares). A segunda parte apresentará o material transportado em estudo (O Anglo Resolve) bem como todo o seu processo de elaboração.

A terceira e quarta partes são destinadas à definição do problema escolhido e o objetivo do trabalho respectivamente.

1.1 Apresentação da Empresa

O Curso Pré-Vestibular

A história do Anglo começou quando Eduardo Celestino Rodrigues, um estudante de Engenharia, iniciou a preparação de candidatos para o vestibular da Escola Politécnica. Ele e seus companheiros instalaram-se na Rua da Liberdade onde hoje existe o Colégio Anglo-Latino, mais tarde mudaram-se para a Rua São Joaquim, mas ainda funcionando anexo ao colégio.

Quando o colégio fechou, o Curso Anglo transferiu as suas atividades para a Rua Tamandaré. Naquela época, o Anglo criou os primeiros fascículos teóricos, os primeiros simulados e o "Anglo Resolve", publicação contendo resoluções e comentários das questões dos principais vestibulares.

Na década de 1970, houve inovações importantes a principal delas foi a ampliação da sua área de atuação, antes concentrada na área de Exatas, para as áreas de Biológicas e Humanas.

No início dos anos 80, inaugurou a sua segunda unidade na cidade de São Paulo, na Rua Sergipe.

A terceira unidade seria inaugurada à Avenida João Dias na década seguinte, onde também se localiza a gráfica dos materiais didáticos.

A Gráfica

Localizada em Santo Amaro, na região metropolitana de São Paulo e ocupando uma área de 1.000 m², o galpão onde se localiza a gráfica está dentro do terreno que também abriga o prédio onde são ministradas as aulas da Unidade João Dias (terreno total 3.500m²).

A gráfica e Editora Anglo foi criada na década de 70 e fabricava então todas as apostilas-caderno para os cursos pré-vestibulares do Anglo Vestibulares. Ao longo do tempo, com o crescimento da demanda de material impresso a gráfica também cresceu. Mas por uma política administrativa da empresa, optou-se por terceirizar grande parte dos trabalhos impressos do ramo da impressão gráfica.

A fabricação das apostilas-caderno em gráfica própria é importante para que o material esteja sempre atualizado e o custo destas constantes atualizações, quando se tem uma gráfica própria é consideravelmente mais baixo. Apenas 30% do material vendido é fabricado na gráfica própria.

Já a fabricação dos materiais de propaganda é terceirizada devido a sua urgência, visto que é necessária a impressão de grandes volumes em pouco tempo, e por serem materiais que não necessitam de atualizações. Este tipo de material é responsável pelos outros 70 % de material fabricado.

A tiragem é de aproximadamente 500 mil apostilas por ano, tendo uma capacidade instalada para produzir 2.000 apostilas por dia. A tiragem de material

terceirizado é de mais de 1,5 milhão. Porém estes materiais têm um volume unitário bem menor que uma apostila fabricada na gráfica própria.

Neste mesmo galpão é armazenado o restante dos materiais de propaganda, cujo serviço de impressão foi terceirizado, e dele são expedidos todos os materiais que as franquias do Sistema Anglo de Ensino (mais de 400 espalhadas por todo país) utilizam em suas salas de ensino, infantil, fundamental, médio e nos cursos pré-vestibulares. Desta maneira são expedidas 1.500 toneladas de material por ano.

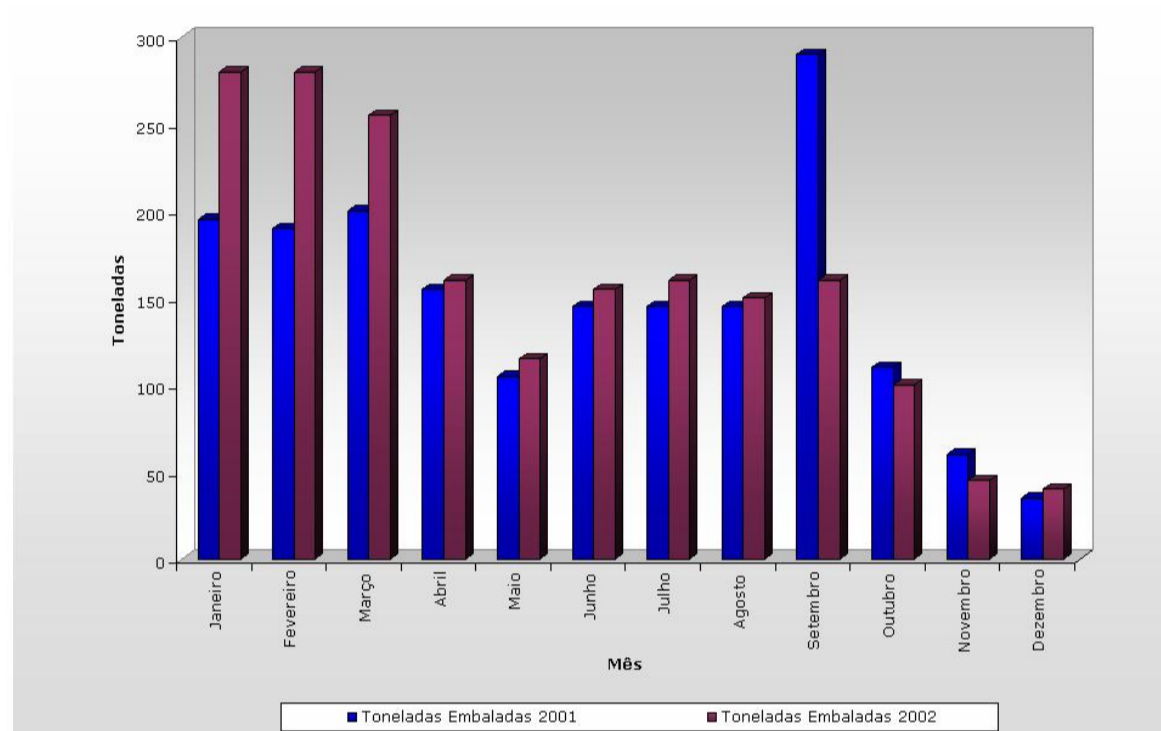


Gráfico 1-1: Toneladas Embaladas por Mês em 2001 e 2002

A Empresa Hoje

O Anglo hoje é como um todo uma empresa destinada ao ensino de vestibulandos (que é feito nas suas três unidades já apresentadas) e à produção de materiais didáticos para seus cursos pré-vestibulares e também materiais do ensino infantil, fundamental e médio para as suas franquias. Franquias estas que são colégios do Estado de São Paulo que tenham convênio com a empresa, fornecendo-lhes o direito de utilizar-se dos materiais didáticos elaborados pelos professores do Anglo.

Atualmente o curso pré-vestibular conta com mais de 40 turmas, incluindo os cursos da manhã, tarde e noite, e com quase cinco mil alunos.

1.2 O Material Transportado em Estudo

O material transportado, conhecido como “Anglo Resolve”, é uma publicação contendo resoluções e comentários das questões dos vestibulares das principais Faculdades e Universidades do Estado de São Paulo.

Tais resoluções são distribuídas gratuitamente na porta dos locais de exame dos vestibulares. Este material é visto como uma propaganda do curso e tem como objetivos:

- ✚ A divulgação da imagem da empresa, mostrando eficácia por parte da equipe de professores do curso, já que o aluno recebe a resolução da prova menos de 24 horas depois de ter terminado de fazê-la;
- ✚ Mas, principalmente, visa conquistar o aluno, pois ele é um possível cliente da empresa no ano seguinte.

O processo de resolução começa com a chegada das provas à unidade da Tamandaré, isto acontece minutos depois de ter se encerrado o tempo de

resolução por parte dos candidatos. Neste momento os professores já estão a postos e prontos para resolvê-la.

Depois de terminada a resolução, as laudas são enviadas para editora que se localiza na própria unidade que foi resolvida a prova, começando a parte de digitação das questões e suas respectivas soluções.

A próxima etapa é a correção de erros de digitação e gramática feita pelo próprio pessoal da editora, em seguida é feita a correção de erros teóricos por parte dos professores.

Como foi referido na introdução, o autor participa de duas etapas mencionadas até aqui: a resolução e a correção. A partir daqui não existe mais nenhuma etapa que o autor participa.

Terminada esta fase de digitação e correção são impressos os filmes gráficos que são enviados para a gráfica chamada de “Ave Maria”, que se localiza em Embu das Artes, periferia de São Paulo.

Aqui vale dizer que estes filmes não são enviados para a gráfica que se localiza na unidade da João Dias, onde a produção é toda destinada aos materiais didáticos, pois a produção destes materiais de propaganda é feita em grande volume e em pouco tempo, não existindo meios para que a produção fosse possível de ser feita na João Dias.

Terminada a impressão, a produção é dividida em três e cada uma das partes é enviada para cada uma das unidades (Tamandaré, Sergipe, João Dias) para serem distribuídas aos alunos do curso. A produção destinada à distribuição na porta dos locais de exame é enviada a unidade da Tamandaré, de onde saem os veículos para a distribuição na porta das escolas escolhidas para o atendimento.

Assim que o material foi distribuído as sobras ficam um tempo nas unidades à disposição dos alunos. Após um certo tempo, todas as sobras são levadas

para a gráfica da João Dias, já que lá existe bastante espaço para o estoque. Para se ter uma idéia, para segunda fase do vestibular da Fuvest 2003, foram estocados cerca de dezesseis mil exemplares das resoluções das provas a serem entregues (Português, História e Química, Geografia e Biologia, Física). A proposta do trabalho visa diminuir esta sobra. As quantidades de materiais estocadas para o Vestibular da Fuvest 2003 foram fornecidas pela empresa e estão representadas no Gráfico 1-2.

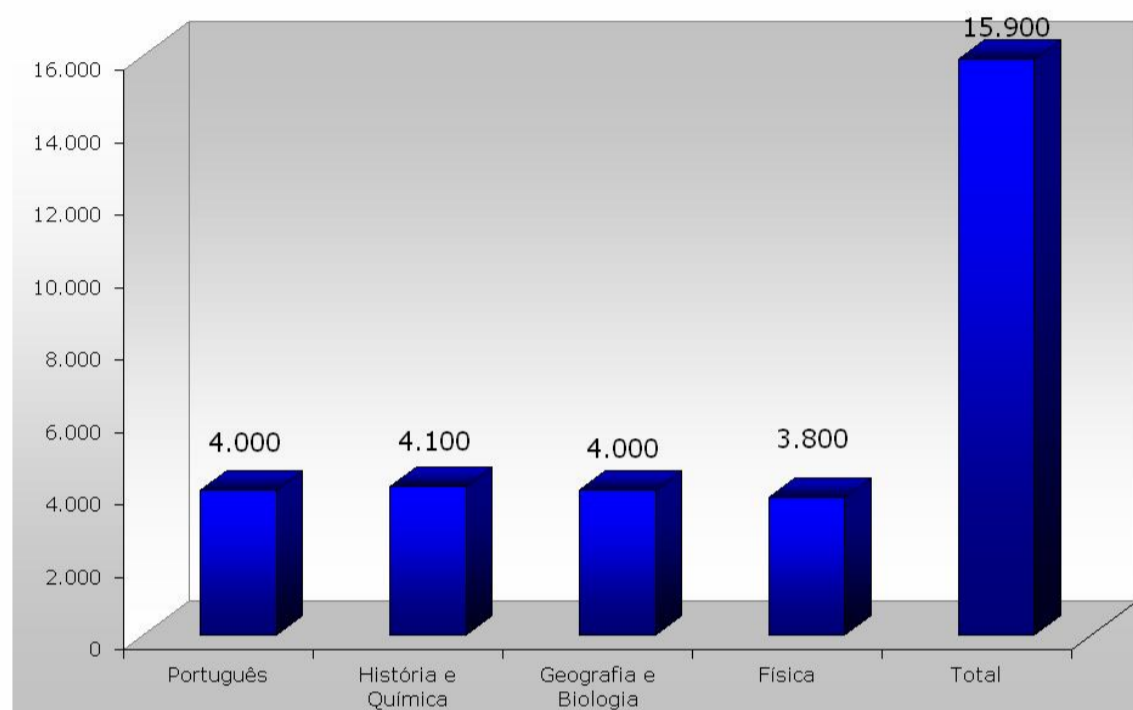


Gráfico 1-2 : Material Estocado (Fuvest 2003)

1.3 Definição do Problema

O problema a ser analisado e solucionado se refere à distribuição das provas resolvidas pela equipe de professores do Anglo Vestibulares, que são chamadas de “Anglo Resolve”.

O que ocorre atualmente na empresa é a sobra em grande quantidade destes materiais de divulgação, que por não serem distribuídos corretamente, acabam sendo estocados e jogados fora, representando altos e desnecessários custos para a empresa.

A principal dificuldade para tal distribuição se deve ao fato de que os “Anglo Resolve” ficam prontos mais ou menos por volta das sete horas da manhã (dependendo muito da prova) e tem que estar na porta das escolas, na maioria das vezes, às onze horas, sendo que o turno dos motoristas e carregadores começa às oito horas.

O horário de entrega varia de acordo com o vestibular para a Fuvest por exemplo, na segunda fase eles terão que chegar, no mais tardar, às 11 horas e 30 minutos em 18 escolas dentro da Grande de São Paulo. O que disponibiliza um tempo de entrega de três horas e meia.

| Dia da Semana | Vestibular | Prova a ser realizada | Anglo Resolve a ser entregue | Horário Limite | Escolas | Número de Alunos |
|---------------|------------|-----------------------|------------------------------|----------------|---------|------------------|
| Domingo | Fuvest | Português | - | 11:30 AM | 18 | 15.691 |
| Segunda | Fuvest | História ou Química | Português | 11:30 AM | 18 | 15.691 |
| Terça | Fuvest | Geografia ou Biologia | História e Química | 11:30 AM | 18 | 15.691 |
| Quarta | Fuvest | Física | Geografia e Biologia | 11:30 AM | 18 | 15.691 |
| Quinta | Fuvest | Matemática | Física | 11:30 AM | 18 | 15.691 |

Tabela 1-1: Dados da segunda fase do Vestibular da Fuvest 2003

Os números apresentados na Tabela 1-1 referentes às escolas e número de alunos não são os totais da Fuvest, pois não contam o interior do Estado de São Paulo, já

que não é interesse da empresa fazer esta divulgação. Analisando a mesma tabela percebe-se que a resolução da prova de Matemática não é distribuída para os alunos nos locais de exame, sendo toda sua produção destinada à distribuição interna.

As Escolas

A Tabela 1-2 a seguir mostra uma lista de todas as escolas que se localizam na região da Grande São Paulo.

| ESCOLA | ENDREÇO |
|--|---|
| Origem - Unidade Tamandaré | RUA TAMANDARÉ, 596 |
| Escola 1- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDARES 1-2-3-4-5 | RUA ANTONIO MACEDO, 505 |
| Escola 2- UNIP - CAMPUS ANALIA FRANCO / TÉRREO e ANDARES 1-2 | AV VEREADOR ABEL FERREIRA, 1100 |
| Escola 3- EE ALEXANDRE DE GUSMAO | RUA CISPLATINA, 298 |
| Escola 4- COL E FAC RADIAL-JABAQUARA-UNID J-AND 2-3-4 | AVENIDA JABAQUARA, 1870 |
| Escola 5- FACULDADE DE BELAS ARTES DE SAO PAULO | RUA DR ALVARO ALVIM, 76 |
| Escola 6- UNIP - CAMPUS VERGUEIRO | RUA APENINOS, 267 |
| Escola 7- COLEGIO BATISTA BRASILEIRO | RUA DR HOMEM DE MELLO, 537 |
| Escola 8- UNIP - CAMPUS MARQUES / ANDARES 1-2-3 | AV MARQUES DE S VICENTE, 3001 |
| Escola 9- UNIBAN - CAMPUS MARTE / SALAS 1-18 | AVENIDA BRAS LEME, 3029 - SANTANA |
| Escola 10- FACULDADE RADIAL - UNIDADE G | RUA PROMOTOR GABRIEL NETUZZI PEREZ, 108 |
| Escola 11- EE OSWALDO ARANHA | AVENIDA PORTUGAL, 859 |
| Escola 12- USP / FACULDADE DE EDUCACAO | AVENIDA DA UNIVERSIDADE, 308 |
| Escola 13- USP / ESCOLA POLITECNICA - BIÊNIO e CIVIL | AVENIDA PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 128 |
| Escola 14- UNIBAN - CAMPUS OSASCO | AV DOS AUTONOMISTAS, 1325 |
| Escola 15- EE CONSELHEIRO CRISPINIANO | AVENIDA ARMINDA DE LIMA, 75 |
| Escola 16- EE DR AMERICO BRASILIENSE | PRACA DO IV CENTENARIO, S/N |
| Escola 17- EE JOAO RAMALHO | RUA JOSE BONIFACIO, 102 |
| Escola 18- ECA / USP - BLOCO B | AV PROF LUCIO MARTINS RODRIGUES, 443 |

Tabela 1-2: Escolas da Grande São Paulo. Fonte: vestibular da Fuvest 2003

É importante destacar a diferença entre o número de escolas considerados pelo Anglo e os locais de exame divulgados pela Fuvest. A Fuvest divulga apenas os locais de exame (47 no total) que é um número bem maior que o número de escolas (38 no total - Grande São Paulo (18) e Interior (20)), pois dois ou mais

locais de exame podem se localizar na mesma escola. Porém para o trabalho apenas interessa o número de escolas, pois não importam quantos locais de exame exista em cada escola, ela sempre será apenas um único ponto de atendimento. A Tabela 1-3 a seguir lista as escolas que apresentam mais de um local de exame:

| Escola | Nome | Locais de Exame | Complemento |
|--------|----------------------------|-----------------|------------------|
| 1 | UNIP- Campus Tatuapé | 1 | Andares 1-2 |
| | | 2 | Andares 3-4 |
| | | 4 | Andar5 |
| 2 | UNIP- Campus Anália Franco | 3 | Andares 1-2 |
| | | 5 | Térreo |
| 4 | Colégio e Faculdade Radial | 7 | Andar 2 |
| | | 8 | Andares 3-4 |
| 8 | UNIP- Campus Marques | 12 | Andares 1-2 |
| | | 13 | Andar 3 |
| 9 | UNIBAN - Campus Marte | 14 | Salas 1 - 12 |
| | | 15 | Salas 13 - 18 |
| 13 | Escola Politécnica | 19 | Biênio - Andar 1 |
| | | 20 | Biênio - Andar 2 |
| | | 21 | Civil |
| 14 | UNIBAN - Campus Osasco | 22 | A2 |
| | | 23 | A1 |

Tabela 1-3 : Dados referentes ao vestibular de 2003

As dezoito escolas estão bem dispersas dentro da Grande São Paulo, visando facilitar o acesso dos candidatos de todas as regiões da cidade, o que dificulta bastante a distribuição respeitando o limite de tempo, o que mostra ser necessário à aplicação de um modelo para o roteamento dos veículos, não podendo ser feito como atualmente é feito, ou seja, de uma forma empírica.

A Distribuição

A distribuição, como já foi descrita, é feita da seguinte maneira: uma parte da produção é enviada da gráfica da “Ave Maria” para uma das unidades do Anglo

(Tamandaré) e desta unidade saem os veículos que levam o material para a porta das escolas. Terminado o descarregamento dos materiais nas portas das escolas, o veículo espera na última escola o término da entrega do material aos alunos, isto acontece quando os portões são fechados para a entrada dos candidatos, só a partir deste momento que o veículo realiza o caminho de volta, passando novamente por todas as escolas e recolhendo as sobras que serão levadas de volta à unidade de origem.

Atualmente isto é feito apenas para todas as escolas da cidade de São Paulo e não é feito para nenhuma escola da periferia de São Paulo, o ABC por exemplo, totalizando 14 escolas. Sendo que conforme contato com a direção da empresa, é de interesse deles que todas as escolas da Grande São Paulo sejam atendidas.

A Tabela 1-4 mostra o itinerário dos veículos da maneira que foi feito para o último ano, juntamente com as distâncias percorridas e o tempo total.

| Veículo 1 | | Veículo 2 | |
|-----------|------------|-----------|------------|
| Escola | Custo (Km) | Escola | Custo (Km) |
| 0 | - | 0 | - |
| 6 | 0,8 | 11 | 10,3 |
| 9 | 9,1 | 10 | 5,1 |
| 1 | 9,4 | 13 | 16,7 |
| 2 | 5,2 | 18 | 1,9 |
| 3 | 7,8 | 12 | 2,5 |
| 4 | 7,2 | 7 | 9,9 |
| 5 | 6,4 | 8 | 5,4 |
| TOTAL | 45,9 | TOTAL | 51,8 |
| TEMPO | 2h 0min | TEMPO | 2h 20min |

Tabela 1-4: Itinerário para o Último Ano

Porém apesar de existir o interesse, esta distribuição às escolas restantes não é feita, pois a empresa dispõe de dois veículos para a entrega e não há tempo disponível para aumentar os percursos dos veículos, visto que a inclusão das escolas restantes ao itinerário dos veículos aumentaria significativamente a distância percorrida, conseqüentemente seriam aumentados os tempos de entrega o que faria com que se ultrapassasse o tempo limite que é de três horas e meia.

O principal motivo deste interesse é que já são feitos todos os esforços possíveis para eliminar esta sobra, menos melhorar a distribuição aos candidatos do vestibular. Por exemplo, o Anglo mantém os materiais por longos períodos a disposição dos alunos, os coloca na sala de matrícula e distribui para os alunos que fazem matrícula para o próximo ano, os distribui fora de época, a empresa solicita insistentemente às franquias que não buscaram suas cotas que as façam. Portanto, dentro deste cenário, uma expansão na distribuição seria fundamental para ajudar a eliminar as sobras de material na empresa.

A proposta do trabalho visa o escoamento de toda a produção ou uma boa diminuição do estoque, visto que a produção não pode ser diminuída, pois existe um lote mínimo de produção destes materiais. Mesmo porque a quantidade produzida se encaixa perfeitamente na aspiração de divulgação da empresa, ou seja, esta quantidade está coerente com as pretensões de atender todo o público alvo da Grande São Paulo, mas acaba sobrando porque não alcança este público, principalmente devido às falhas na distribuição.

O trabalho propõe mostrar que uma ampliação, das atuais 14 para 18 escolas, irá diminuir boa parte do estoque e é possível de ser feita dentro do tempo limite e sem muitos aumentos nos gastos com a distribuição, ou seja, usando os mesmos dois veículos como é feito atualmente. Os gastos só aumentariam devido à contratação de mais entregadores para fazerem a distribuição na porta das escolas.

Vale dizer que o trabalho todo será desenvolvido tendo em vista a resolução do problema para a distribuição dos “Anglo Resolve” referentes à segunda fase da Fuvest de 2003, que é o maior vestibular do país. Porém isto não significa que a metodologia apresentada seja única para este problema, ela poderá ser aplicada pela empresa para os anos seguintes e para outros vestibulares também, para tanto é necessário mostrar que os resultados finais são significativos.

1.4 Objetivo do Trabalho

Tendo em vista o levantamento do problema, o objetivo do trabalho será determinar os itinerários dos veículos de tal maneira que todas as escolas propostas sejam atendidas no tempo disponível de acordo com suas respectivas demandas, respeitando as restrições e minimizando o custo.

2. Revisão da Literatura

O problema descrito no capítulo anterior encaixa-se perfeitamente dentro de um problema clássico da pesquisa operacional chamado “problema de roteamento de veículos”.

No próximo item será mostrado qual o campo de estudo da pesquisa operacional explicitando alguns conceitos gerais. Já o item seguinte dará uma visão geral dos diversos problemas que se encaixam no problema de roteamento de veículos com destaque para o qual interessa para a resolução do problema.

2.1 A Pesquisa Operacional

Conseguir uma boa definição para Pesquisa Operacional é algo difícil pelo caráter multidisciplinar desta ciência. Por isso as definições que se encontram são muitas gerais. Mas pode-se começar destacando que a pesquisa operacional envolve a pesquisa de operações, operações que HERMANN e MAGEE [15] definem desta maneira “As operações são consideradas como uma única entidade. O objetivo do estudo não é o equipamento utilizado, nem a predisposição dos participantes, nem as propriedades físicas do produto final, mas a combinação de todos estes fatores em conjunto”.

Esta definição inicial torna menos geral a definição de Pesquisa Operacional que os autores HILLIER e LIEBERMAN [16] definem como “uma abordagem científica à tomada de decisões que envolvem as operações de sistemas organizacionais”.

O estudo das técnicas de Pesquisa Operacional provém ao tomador de decisão o conhecimento de modelos para a resolução de problemas que envolvem diversas variáveis, que estão sujeitas a restrições de igualdade e desigualdades e que quase sempre formam uma função objetivo a qual procura-se maximizar ou minimizar.

Tais problemas costumam ser muito complexo e apresentam muitas variáveis, isso explica o forte vínculo desta disciplina com métodos computacionais.

A Metodologia da Pesquisa Operacional apresenta diferentes etapas conforme ilustra a Figura 2-1:

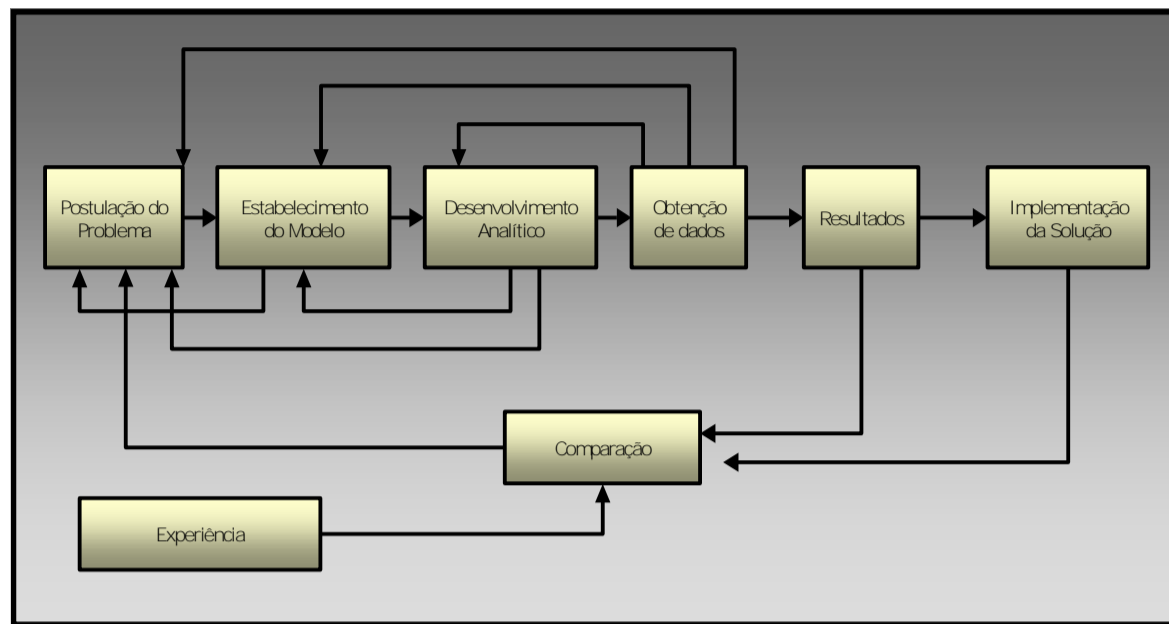


Figura 2-1: Metodologia da Pesquisa Operacional. Fonte: ELLENRIEDER [7]

No decorrer do desenvolvimento deste Trabalho de Formatura, ficará claro como se desenvolve a metodologia da Pesquisa Operacional mostrada na Figura 2-1. No entanto convém uma breve explicação: a metodologia consiste primeiramente na definição do problema (capítulo 1) e estabelecimento do modelo que se adeque ao problema (capítulo 3). Em seguida deve-se obter os dados do problema necessários para o modelo para que este fique pronto para gerar os resultados (capítulo 4). De posse dos resultados, antes de implementá-los, deve-se compará-los com os atuais, para assim verificar se a solução é factível (capítulo 5). Em caso afirmativo, pode-se implementar a solução. Feita a implementação, deve-se comparar o anterior com o atual, para se averiguar de realmente os resultados são

significativos. Estas comparações são fortemente influenciadas pela experiência dos profissionais envolvidos. Até este momento foi mostrada apenas a primeira etapa (Definição do Problema e Objetivo do Trabalho).

2.2 Problema de Roteamento de Veículos (PRV)

Um sistema de roteamento é definido, segundo GOLDBARG e LUNA [12], como um conjunto organizado de meios que objetiva o atendimento de demandas localizadas nos arcos ou nos vértices de alguma rede de transporte. Nesta operação é necessário um plano efetivo e flexível de entregas. Tal plano deverá ser capaz de atender às especificações do nível de eficiência pretendido para o serviço de transporte. Dentro deste contexto, define-se claramente um problema de característica combinatória e de grande dificuldade de solução que passaremos a denominar de problema de roteamento de veículos (PRV). Outra definição, dada pelos mesmos autores, de forma mais compacta, diz que no PRV “o que se deseja é, com o uso de veículos, visitar uma série de clientes ao menor custo possível, atendendo a todas as demais imposições do problema”. Essas imposições podem ser: as demandas de cada cliente, a capacidade de cada veículo, janelas de tempo, tempos de carregamento e descarregamento.

Existem diversas formulações para o Problema de Roteamento de Veículos, cada uma com suas particularidades. É de extrema importância conhecer e estudar um certo número de formulações existentes, de tal forma que a formulação escolhida seja uma boa escolha, ou, segundo GOLDBARG e LUNA [12] “Os problemas de otimização podem admitir diversas formulações diferentes. Como a formulação pode interferir fortemente em seu processo de solução, o estudo das possíveis alternativas de formulação é um tema relevante”. Dentre as formulações para o Problema de Roteamento de Veículos pode-se citar algumas:

 Transporte Escolar

“*Bus routing in a Multi-School System*” NEWTON e THOMAS [19] apresentam um heurística para o problema do transporte escolar na qual cada estudante deve ser designado a um ônibus e a rota de cada ônibus deve ser definida. Ao contrário da maioria dos problemas que consideram uma única escola como ponto de partida/chegada dos ônibus o modelo apresenta a solução para uma base de muitas escolas.

BODIN e BERMAN [1] também abordam o assunto do transporte escolar em sua publicação “*Routing and Scheduling of School Buses by Computer*”. Nesse artigo os autores propõem um novo modelo de roteamento e determinação de itinerários de ônibus escolares. Além disso, apresentam um diferente procedimento para geração, processamento e preparação dos dados de entrada.

 Roteamento de linhas aéreas

YAN e TU [23] apresentam em seu artigo “*Multifleet Routing and Multistop Flight Scheduling Perturbation*” uma estrutura para auxiliar o roteamento da frota e o agendamento dos vôos para operações de múltiplos vôos e múltiplas paradas.

 Distribuição de Jornais

Em “*Practical aspects of route planning for magazine and newspaper wholesalers*” DILLMANN, BECKER e BECKFELD [6] apresentam diversos aspectos práticos da entrega de jornais ressaltando que o tempo é bastante limitado levando os entregadores a começar o trabalho muito cedo e os motoristas a conhecerem muito bem os caminhos a serem percorridos. Outro problema que é muito comum neste tipo de entrega é que não se deve apenas

entregar, mas também recolher os jornais do dia anterior e, de acordo com o volume, isto leva a se considerar os tempos de carga e descarga.

🌈 Modelos Genéricos

Além dos modelos aplicados existem os modelos genéricos, como o proposto por FISHER e JAIKUMAR [8] em sua publicação “A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing”. Utilizando-se de uma frota de veículos deve-se, a partir de um armazém central, realizar a entrega de pedidos a diferentes clientes. Neste artigo, apresenta-se uma formulação de programação linear inteira. A função objetivo é linear e visa a minimização de custos. As restrições também lineares englobam diversas limitações (capacidade e demanda, elaboração de percurso, etc).

Complexidade do Problema de Roteamento de Veículos

Segundo GAREY e JOHNSON [10] “Poucos termos técnicos ganharam renome tão rápido como o termo "NP-difícil" ou, como é conhecido na língua inglesa, NP-Hard. No tempo curto desde sua introdução nos anos 70, este termo veio preencher o vazio dos problemas intratáveis que os desenvolvedores de algoritmo encontram quando procuram resolver problemas grandes e mais complexos. Uma variedade larga de problemas geralmente encontrados pelos matemáticos, pela informática, e pelos profissionais de pesquisa de operacional são agora conhecidos como NP- difícil, e o número de tais problemas continua a crescer quase que diariamente. Certamente, os problemas NP- difíceis são agora tão comuns que é importante para qualquer um, que se preocupe em estar informado com os aspectos computacionais deste campo, se familiarizar com o significado e implicações deste conceito”.

Os problemas NP-difíceis têm como característica possuírem tempo de resolução que obedece a uma curva exponencial, ou seja, conforme o problema aumenta o

tempo de resolução aumenta numa proporção maior. O tempo pode aumentar tanto que o problema passa a ser intratável por meio de um algoritmo exato (ver Tabela 2-1).

| | | Tamanho n | | | | | |
|---------------------------------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------------|------------------------------|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| Função da Complexidade do Tempo | n | 0,00001 segundo | 0,00002 segundo | 0,00003 segundo | 0,00004 segundo | 0,00005 segundo | 0,00006 segundo |
| | n^2 | 0,0001 segundo | 0,0004 segundo | 0,0009 segundo | 0,0016 segundo | 0,0025 segundo | 0,0036 segundo |
| | n^3 | 0,001 segundo | 0,008 segundo | 0,027 segundo | 0,064 segundo | 0,125 segundo | 0,216 segundo |
| | n^5 | 0,1 segundo | 3,2 segundos | 24,3 segundos | 1,7 minutos | 5,2 minutos | 13 minutos |
| | 2^n | 0,001 segundo | 1 segundo | 17,9 minutos | 12,7 dias | 35,7 anos | 366 séculos |
| | 3^n | 0,059 segundo | 58 minutos | 6,5 anos | 3855 séculos | 2×10^8 séculos | $1,3 \times 10^{13}$ séculos |

Tabela 2-1 : Comparação de funções polinomiais e exponenciais da complexidade do tempo. Fonte:

GAREY e JOHNSON [10]

O Problema de Roteamento de Veículos faz parte dos diversos problemas NP-difícil. Em “*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*” GAREY e JOHNSON [10] fazem a demonstração da complexidade do Problema de Roteamento de Veículos e de outros problemas

também além de listarem uma série de problemas que se encaixam nesta categoria de problemas.

Porém segundo GOLDBARG e LUNA [12] o Problema de Roteamento de Veículos só passa a ser intratável para mais de 30 clientes. Portanto, como no caso do Anglo este número é igual a dezoito, é possível encontrar a solução por meio de um algoritmo exato.

3. Modelo de Resolução

Resumidamente o problema consiste em como determinar os itinerários dos veículos de tal maneira que todas as escolas propostas sejam atendidas de acordo com suas respectivas demandas, respeitando as restrições de tempo disponível e minimizando o custo.

Para a resolução do problema foi necessária a escolha de um modelo de resolução dentro dos propostos para o Problema de Roteamento de Veículos.

Requisitos do Modelo

De acordo com o problema apresentado, o modelo escolhido teria que ter os seguintes requisitos:

Uma função objetivo que minimize a distância percorrida até o último cliente a ser atendido: apesar de existir uma hora limite para a chegada do material na porta das escolas que se não for cumprida, inviabiliza a entrega do material nas mãos dos alunos, ou seja, há uma limitação de tempo para a distribuição, a função a ser minimizada no caso da gráfica do Anglo é a distância percorrida. Isto acontece porque de acordo com DILLMANN, BECKER e BECKEFELD [6] “modelar a estrutura de tempo dentro de uma cidade grande só é possível se a entrega é feita antes da hora do “rush” começar, pois imprevisíveis tráficos durante a hora do “rush” fazem com que o tempo fique impossível de ser estimado”, situação esta que está presente no problema da empresa, já que a entrega coincide com a hora do “rush” da manhã na qual quase todos na cidade estão indo para o trabalho, escola, faculdade, etc; Porém a distância deve ser minimizada sem considerar a volta para a origem, ou seja, ela deve ser minimizada até o último cliente a ser

atendido, uma vez que o veículo não volta para origem sem antes passar novamente em todas as escolas para recolher as sobras de material.

O modelo deve apresentar a possibilidade de se utilizar mais de um veículo: algumas abordagens para a resolução de entregas consideram apenas um veículo para o roteamento, o que é complicado quando se quer entregar o material dentro de uma cidade tão grande e com tantos problemas de tráfico como São Paulo, outro inconveniente de se considerar apenas um veículo, é o problema da capacidade, explicitado a seguir;

O modelo deve considerar restrições de capacidade dos veículos: como são necessários mais de um veículo para o roteamento e os veículos não apresentam uma capacidade de carregar muito material, de tal maneira que a capacidade do veículo não influa na resolução do problema, é necessário que o modelo considere isto como restrição na escolha da solução.

O modelo mais apropriado, de acordo com os requisitos apresentados, é o de FISHER e JAIKUMAR [8], pois ele satisfaz grande parte das condições apresentadas.

Para resolver o modelo deve-se utilizar um software de otimização. O software escolhido foi uma versão profissional do “What’s Best!” fornecido pelo Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Os motivos da escolha deste software são: o fato da entrada de dados, assim como a saída dos resultados, serem feitas por meio de planilhas eletrônicas do Microsoft Excel 97 proporcionando uma interface bastante amigável com o operador o que é de extrema importância para a aplicação em uma empresa; Segundo pela adequação da ferramenta a problemas de programação linear inteira.

Outros autores usaram este software para resolverem problemas de programação linear e obtiveram os resultados desejados:

SCHUSTER e ALLEN [21] ilustram a aplicação da programação linear em um problema de planejamento agregado de produção de uma empresa fabricante de produtos derivados de frutas. O modelo procura minimizar os custos de transporte, os custos de fabricação e os custos de estocagem, respeitando as restrições operacionais do sistema (estoque final mínimo, capacidade de fabricação e de transferência e porcentagem mínima e máxima de fruta na receita). Trata-se da utilização de um modelo em planilha com o otimizador “What’s Best!”, que precisou ser reduzido (324 variáveis e 361 restrições), por meio da agregação em famílias de produtos, para se adequar às capacidades do software. O sistema implantado auxilia as decisões de planejamento logístico e foi responsável por uma redução de custos de US\$ 130.000 a US\$ 170.000 durante o primeiro ano.

KAWAMURA, RONCONI e YOSHIZAKI [17] utilizaram o mesmo software um modelo que minimiza custos de transporte e armazenagem em um conjunto de usinas sucroalcooleiras.

Já SANTORO e RONCONI [20] aplicaram um modelo de programação linear inteira multiperíodos a um sistema de distribuição de cloreto de potássio dentro de um sistema gerenciado pela CVRD (Companhia Vale do Rio Doce) com o objetivo de minimizar custos de transporte e armazenagem deste material, considerando as capacidades de produção, armazenagem e fluxo de materiais.

3.1 Descrição do Modelo

O modelo escolhido considera N clientes que devem ser atendidos por M veículos com capacidades determinadas. Os clientes são considerados vértices e os

percursos de um cliente i para um cliente j são variáveis do problema, a estas variáveis estão associados os custos de se percorrer o caminho escolhido. A função objetivo visa minimizar a distância total percorrida, sempre obedecendo as diversas restrições que são necessárias para que o modelo matemático chegue numa solução factível, ou seja, solução que tenha um caminho contínuo, atenda todos os clientes e obedeça a capacidade dos veículos.

O detalhamento da formulação do modelo, feito a seguir, é baseado na publicação “*A Generalized Assignment Heuristics For Vehicle Routing*” FISHER e JAIKUMAR [8].

Descrição de Variáveis e Parâmetros

Na Tabela 3-1 a seguir são definidos os índices:

| Índice | Representa a entidade | Intervalo de Variação |
|--------|--|-----------------------|
| i, j | Clientes. No problema representa o número da escola | $(0, 1, 2, \dots, N)$ |
| k | Veículo. No problema representa os veículo a serem alocados à distribuição | $(1, 2, \dots, M)$ |

Tabela 3-1: Definição do índices

O endereço $i = 0$ ou $j = 0$ representa o ponto de partida ou chegada (origem).

Na Tabela 3-2 a seguir são definidos os parâmetros

| Parâmetro | Significado |
|-----------|---|
| N | Número de clientes |
| M | Número veículos |
| c_{ij} | Custo de percorrer o percurso de i para j . Para o problema foi considerada a distância, em Km, entre as escolas. |
| Q_k | Capacidade máxima do veículo k . No problema a capacidade de material do veículo. No caso como os veículos à disposição são iguais, o que implica em ter mesma capacidade, não precisaria do índice k . |
| q_i | É a demanda do cliente i . No problema é a quantidade de alunos que fazem prova na escola i . |

Tabela 3-2: Definição dos parâmetros

Na Tabela 3-3 a seguir são definidas as variáveis:

| Variável | Tipo | Valores/Significado |
|-----------|---------|--|
| X_{ijk} | Binária | Assumindo o valor: - 1: indica se o percurso que sai de i e vai diretamente para j no veículo k , é escolhido para fazer parte da solução; - 0: caso não seja escolhido. |
| Y_{ik} | Binária | Assumindo o valor: - 1: indica que o veículo k visita o endereço i ; - 0: caso não visite. |

Tabela 3-3: Definição de Variáveis

Formulação

Função objetivo:

$$\min Z = \sum_{i,j} (C_{ij} \sum_k^M X_{ijk}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^M Y_{ik} = 1 \quad i=1,2,\dots,N \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^M Y_{ik} = M \quad i=0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot Y_{ik} \leq Q_k \quad k=1,2,\dots,M \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^N X_{ijk} = \sum_{j=0}^N X_{jik} = Y_{ik} \quad i=0,1,\dots,N \text{ e } k=1,2,\dots,M \quad (5)$$

$$\sum_{i,j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \{1,2,\dots,N\} \quad k=1,2,\dots,M \quad (6)$$

$$2 \leq |S| \leq N - 1$$

Detalhamento do Modelo

Nesta parte será apresentada uma explicação de todos os tópicos da formulação, de acordo com suas numerações.

Para uma melhor explicação será utilizado um exemplo com uma representação gráfica de acordo com os conceitos de teoria dos grafos. Este exemplo considerará uma origem e um conjunto de seis clientes.

$$\text{Função objetivo (1): } \min Z = \sum_{i,j} (C_{ij} \sum_k X_{ijk})$$

A função z , a ser minimizada, representa o custo de se percorrer todos os percursos do caminho escolhido. Para todo par de clientes i,j existe um custo associado e se para um certo par $\sum_k X_{ijk} = 0$ o custo C_{ij} não contará, afinal ele

não será percorrido por nenhum veículo. Mas se $\sum_k X_{ijk} = 1$, o que significa que o veículo k percorre o arco i,j , então seu custo entrará juntamente com os outros no valor final da função z , que por sua vez terá que ser mínimo.

$$\text{Restrição (2): } \sum_k Y_{ik} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Não somente garante o atendimento de cada cliente por algum dos k veículos, como também assegura que os veículos não visitem mais de uma vez um cliente.

Para demonstrar que esta restrição assegura que isso não aconteça, pode-se utilizar o modelo proposto e supor um veículo visitando um cliente que já foi visitado por outro veículo e um cliente não visitado por nenhum veículo, como mostra a Figura 3-1:

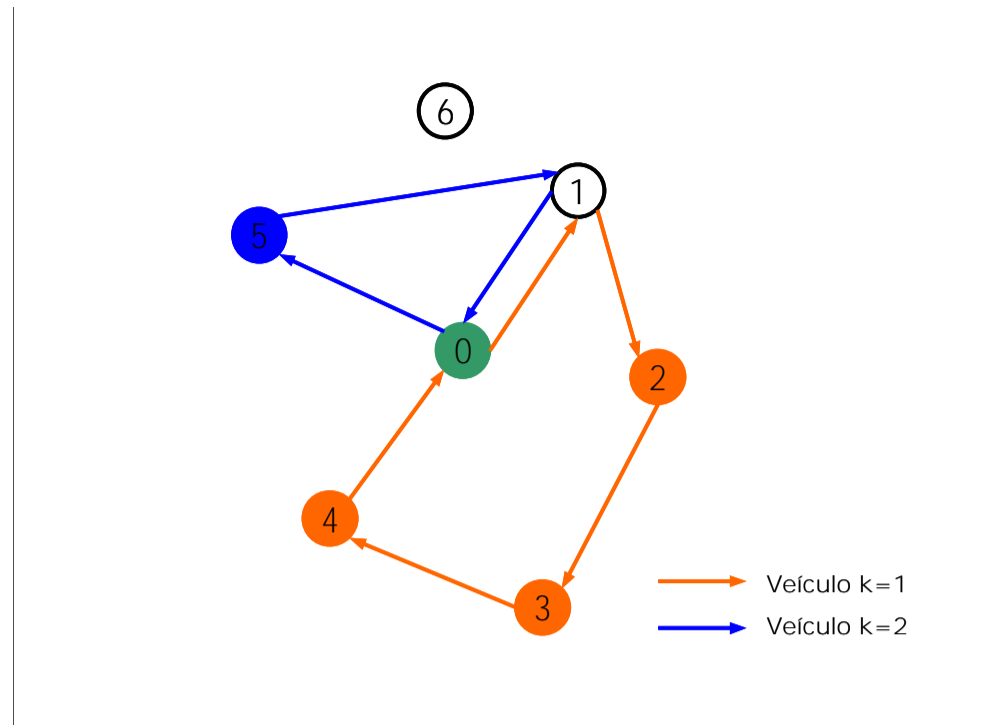


Figura 3-1 : Situação inviável para a restrição 2

Neste exemplo o cliente 1 não poderia ser visitado pelos dois veículos e sim por apenas um e o cliente 6 teria que ser visitado por algum veículo. Mas verificando a restrição 2 para este caso, percebe-se que ela foi violada duas vezes:

$Y_{6,1} + Y_{6,2} = 1 \Rightarrow 0 + 0 = 1$ (Falso), portanto esta restrição garante que um cliente seja visitado por algum veículo;

$Y_{1,1} + Y_{1,2} = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 1$ (Falso), portanto realmente esta restrição garante que um cliente não seja visitado por dois ou mais veículos.

$$\text{Restrição (3): } \sum_k^M Y_{ik} = M \quad i=0$$

Garante que a origem receba a visita de todos os k veículos uma única vez.

Pode-se demonstrar que esta restrição garante isso imaginando:

a) Apenas um dos veículos ser designado.

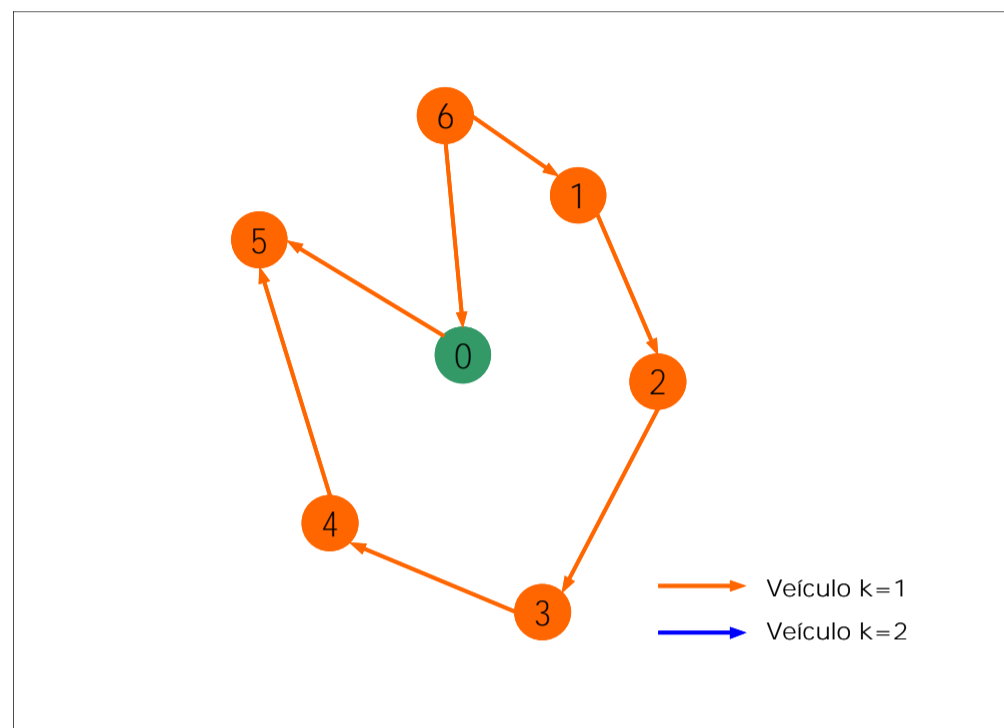


Figura 3-2: Primeira situação inviável para a restrição 3.

Para esta situação como existem dois veículos ($M=2$) a restrição 3 impõe que $Y_{0,1} + Y_{0,2} = 2$, mas verifica-se que para o exemplo dado $Y_{0,1} + Y_{0,2} = 1$, portanto a restrição foi violada, mostrando que ela impede que apenas um veículo seja designado.

b) Os veículos não passando pela origem.

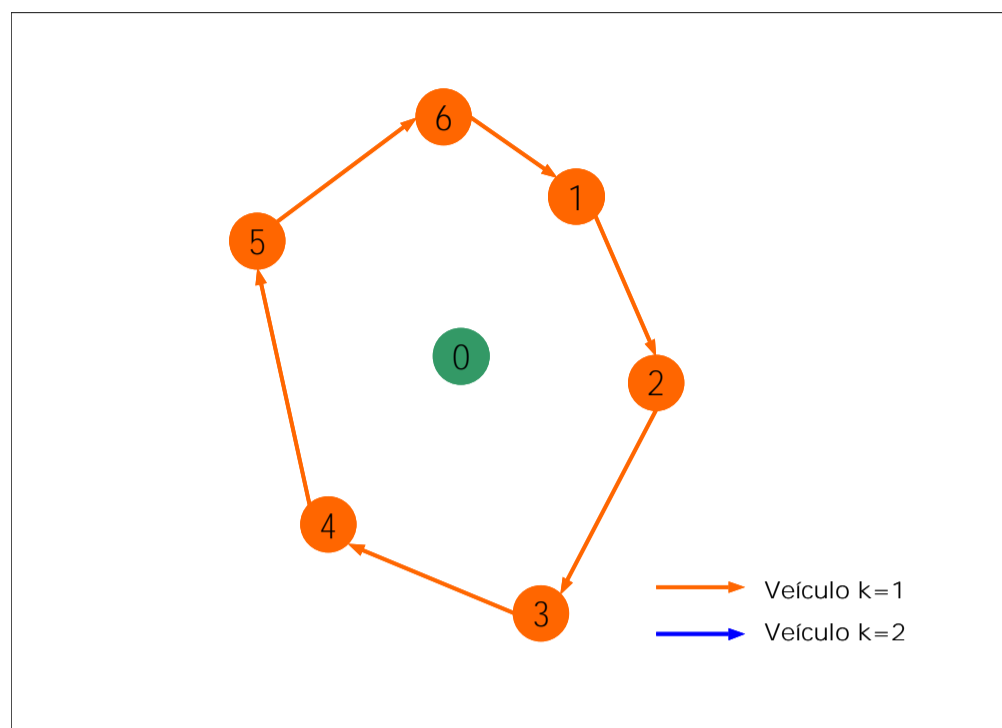


Figura 3-3: Segunda situação inviável para a restrição 3

Para esta situação a restrição 3 impõe novamente que $Y_{0,1} + Y_{0,2} = 2$, mas verifica-se que para o exemplo dado $Y_{0,1} + Y_{0,2} = 0$, portanto a restrição foi violada, mostrando que ela impede que os veículos não partam nem cheguem na origem. Mais adiante no trabalho, este caso será retomado como uma das explicações da restrição 6.

$$\text{Restrição (4): } \sum_{i=1}^N q_i \cdot Y_{ik} \leq Q_k \quad k = 1, 2, \dots, M$$

Esta restrição impede que a utilização do veículo além da sua capacidade. Cada cliente tem um demanda q_i . A soma das demandas dos clientes que fazem parte de uma rota não pode ultrapassar a capacidade do veículo (Q_k) que faz aquela rota. A Figura 3-4 ilustra o que deve acontecer:

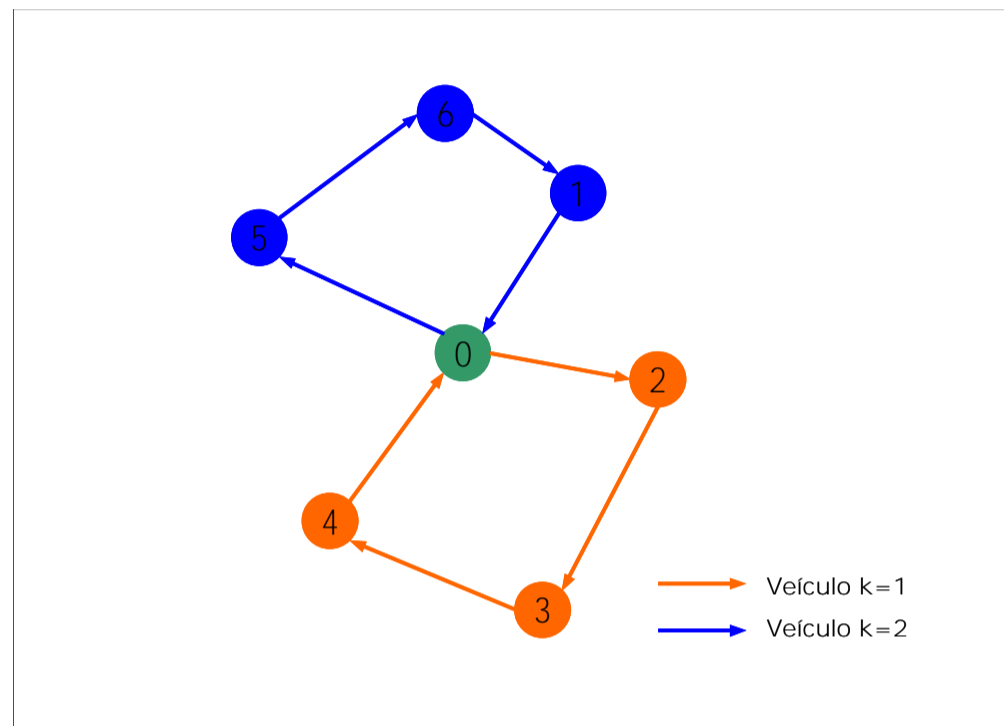


Figura 3-4: Situação inviável para a restrição 4

Desta maneira:

$$Y_{11} = Y_{51} = Y_{61} = 0 \text{ e } Y_{21} = Y_{31} = Y_{41} = 1 \Rightarrow q_2 + q_3 + q_4 \leq Q_1$$

$$Y_{22} = Y_{32} = Y_{42} = 0 \text{ e } Y_{12} = Y_{52} = Y_{62} = 1 \Rightarrow q_1 + q_5 + q_6 \leq Q_2$$

Se as inequações forem verdadeiras as restrições de capacidade serão respeitadas.

$$\text{Restrição(5): } \sum_{j=0}^N X_{ijk} = \sum_{j=0}^N X_{jik} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, N \quad k=1, \dots, M$$

Esta restrição garante que os veículos não parem suas rotas em um cliente. Por exemplo, se um cliente i é visitado por um veículo k , então $Y_{ik}=1$, portanto terá

que existirá um arco de saída do cliente i e ele será único pois $\sum_{j=0}^N X_{ijk} = 1$. O

mesmo ocorrerá para a chegada no cliente i , pois $\sum_{j=0}^N X_{jik} = 1$. Porém, se o

cliente i não é atendido pelo veículo k , então $Y_{ik}=0$, o que impedirá o veículo k

chegar $\sum_{j=0}^N X_{ijk} = 0$ ou sair $\sum_{j=0}^N X_{jik} = 0$ do cliente i . Esta restrição também

é válida para a origem, a diferença é que na origem só ocorre o primeiro caso ($Y_{0,k} = 1$ para qualquer k), pois os dois veículos têm que partir dela e chegar nela.

$$\text{Restrição (6): } \sum_{i,j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, 2 \leq |S| \leq N - 1$$

Esta é uma restrição que evita as chamadas subrotas. Para ilustrar tal situação, foi construído o exemplo da Figura 3-5:

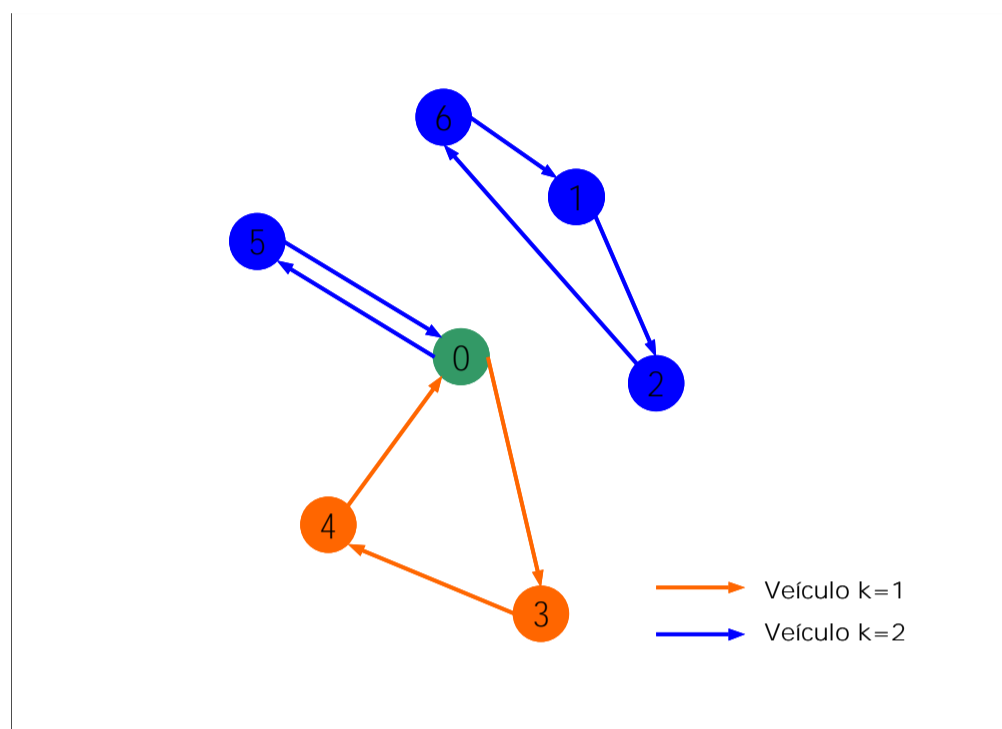


Figura 3-5: Situação inviável para a restrição 6

Para mostrar o porquê da necessidade da restrição 6, deve-se mostrar, que para este caso, todas as outras restrições são satisfeitas:

Restrição (2):

Para ser obedecida deve-se ter $\sum_k^2 Y_{ik} = 1$ para qualquer i de 1 a 6. Verificando:

Para $i=1$, $Y_{11} = 0$ e $Y_{12} = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$ (Verdadeiro);

Para $i=2$, $Y_{21} = 0$ e $Y_{22} = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$ (Verdadeiro);

Para $i=3$, $Y_{31} = 1$ e $Y_{32} = 0 \Rightarrow 1 + 0 = 1$ (Verdadeiro);

Para $i=4$, $Y_{41} = 1$ e $Y_{42} = 0 \Rightarrow 1 + 0 = 1$ (Verdadeiro);

Para $i=5$, $Y_{51} = 0$ e $Y_{52} = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$ (Verdadeiro);

Para $i=6$, $Y_{61} = 0$ e $Y_{62} = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$ (Verdadeiro).

Portanto a restrição 2 não é violada.

Restrição (3):

É obedecida, pois $Y_{01} = 1$ e $Y_{02} = 1$, portanto $\sum_k^2 Y_{0k} = 2$, obedecendo a restrição 3.

Restrição (4):

É obedecida pois:

$$Y_{11} = Y_{21} = Y_{51} = Y_{61} = 0 \text{ e } Y_{31} = Y_{41} = 1 \Rightarrow q_3 + q_4 \leq Q_1;$$

$$Y_{32} = Y_{42} = 0 \text{ e } Y_{12} = Y_{22} = Y_{52} = Y_{62} = 1 \Rightarrow q_1 + q_2 + q_5 + q_6 \leq Q_2.$$

Restrição (5):

É obedecida, pois ela garante que todo o cliente tenha um arco de chegada e um de saída e observando o exemplo, é fato que todos os clientes têm seu arco de entrada e o de saída, inclusive a origem que é o único dos “clientes” que tem seu arco de entrada e de saída para os dois veículos.

Com isso, verifica-se que todas as restrições estão satisfeitas e como a solução apresentada não é uma solução viável, a restrição seis é necessária.

Restrição (6):

A restrição seis será violada para os três clientes que fazem parte da subrota, ou seja, clientes 1,2 e 6. Para eles, tem-se o seguinte:

$X_{ijk} = 0$ ($\forall i,j \mid k=1$), já que estes três clientes não são atendidos pelo veículo 1.

Porém para $k=2$:

$$X_{122} + X_{212} + X_{162} + X_{612} + X_{262} + X_{622} \leq 3-1$$

$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2 \text{ (Falso)}$$

Portanto, a restrição seis torna esta solução impossível.

Esta restrição funciona, pois ela impõe para todas as possíveis combinações dos N clientes (combinações que vão de 2 a 2 até $N-1$ a $N-1$ ou, na linguagem apresentada, $2 \leq |S| \leq N-1$) que o número de arestas (arcos) que ligam a combinação dos vértices (clientes) considerada seja menor ou igual ao número de vértices menos um, ou seja, ela impede o fechamento do polígono.

No exemplo da Figura 3-5, ela impediria a formação do triângulo 126, pois a restrição impõe para três vértices que eles tenham duas ou menos arestas e como o triângulo necessita de três para ser formado, a restrição impede o aparecimento do polígono de três lados.

Duas dúvidas muito comuns referente a restrição 6 podem surgir neste momento:

Por quê esta restrição não inclui a possibilidade dos N clientes formarem uma única sub-rota? Ou seja, por quê a expressão $2 \leq |S| \leq N-1$, da restrição 6, limita-se até $N-1$ e não N ?

Não existe a necessidade de se fazer a restrição 6 para os N clientes, pois a restrição 3 evita que isto aconteça quando ela impõem que não pode existir a possibilidade de os k veículos não passarem pela origem, vide exemplo “b” da restrição 3, Figura 3-3.

Por quê a origem não entra na restrição 6? Ou seja, por quê a expressão $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, da restrição 6, limita-se de 1 até N e não de 0 (origem) até N ?

A restrição seis não inclui a origem pois uma solução viável inclui uma subrota com a origem. Por exemplo, considere uma solução possível, como a da Figura 3-6:

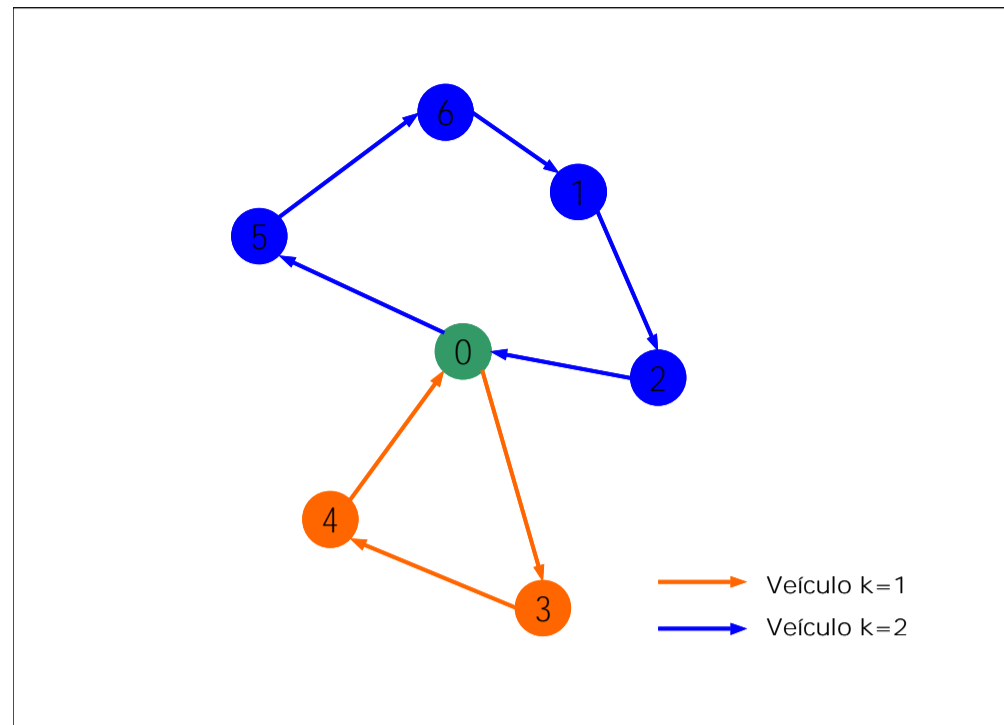


Figura 3-6: Solução Possível

Se fosse feita a restrição de subrota para os vértices 0, 3, 4, ter-se-ia:

$$X_{031} + X_{301} + X_{041} + X_{401} + X_{341} + X_{431} \leq 3-1$$

$$1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2 \text{ (Falso)}$$

O mesmo aconteceria para os outros cinco vértices, só que ela iria impedir a formação do pentágono e não do triângulo como no caso mostrado.

Portanto, a restrição não pode ser feita para a origem, pois, se fosse feita, não existiria solução para o problema, ou seja, ela impossibilitaria todas as soluções possíveis (consideram-se soluções possíveis qualquer solução que satisfaça todas as restrições, o que não a garante de ser ótima, esta só existe uma).

3.2 Adaptação do Modelo

Como previamente apresentado, o modelo satisfaz grande parte das condições apresentadas. Esta exceção se deve ao fato de que o modelo, como apresentado, minimiza a distância percorrida saindo da origem e voltando para a mesma. Porém no problema do Anglo o tempo é um fator limitante até a chegada na última escola a ser atendida, não importando a distância que esta escola esteja da origem, mesmo porque os veículos não voltam para a origem após atender a última escola, eles estacionam nesta mesma escola e esperam a distribuição para fazer o caminho de volta recolhendo as sobras.

Porém o Modelo pode ser facilmente adaptado para resolver o problema de forma a satisfazer esta condição. Para isso basta substituir as distâncias c_{ij} ($i=0,1,2,\dots,N$ e $j=0$) por zero. Esta alteração fará com que o Modelo não considere o custo do percurso de volta à origem, ou seja, não importará a distância à origem da última escola a ser atendida visto que esta distância não entrará na função objetivo a ser minimizada. A Figura 3-7 ilustra a diferença entre o modelo e sua adaptação ao problema.

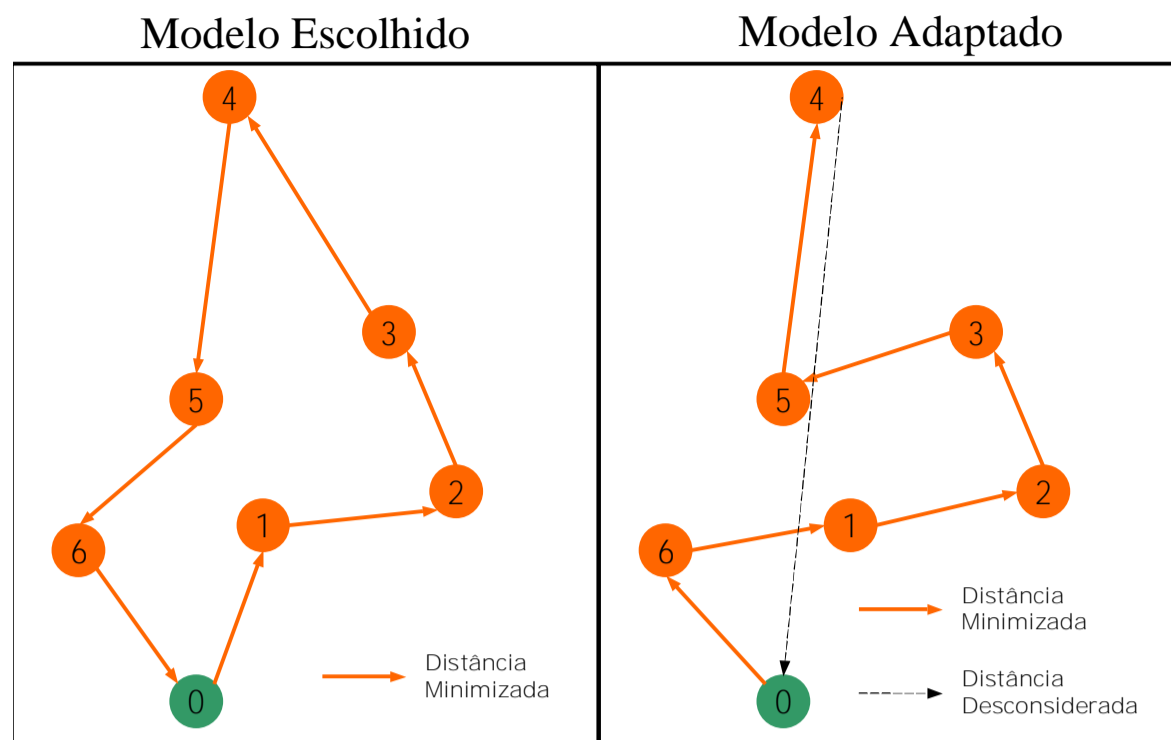


Figura 3-7: Comparação entre os Modelos Escolhido e Adaptado

As setas em laranja representam os arcos escolhidos para fazerem parte do percurso que é o mínimo para cada um dos casos. Considerando que as distâncias representadas entre os vértices 1, 2, 3, 5 e 6 são todas iguais a d e que as distâncias dos vértices 3 e 5 ao vértice 4 são iguais a $2d$, pode-se calcular a distância percorrida nos dois casos. Esta distância é igual à $9d$ para o modelo na sua forma original e $7d$ para o modelo adaptado. Esta redução acontece já que, para o modelo adaptado, não existe um custo associado ao último caminho escolhido, ou seja, o custo do caminho de volta do último vértice atendido (Vértice 4) não entra na função objetivo. Desta forma no modelo adaptado se espera que o último vértice atendido esteja sempre bem distante da origem.

Além da modificação apresentada, existe uma segunda adaptação referente às restrições de subrotas. Ela é necessária, pois, devido às dimensões do problema, o número de restrições de subrotas é extremamente grande, ultrapassando a

capacidade do software escolhido. Por exemplo, para dois veículos o modelo só é possível de ser aplicado no software com todas as restrições para 11 clientes ou menos. Esta parte da adaptação será mostrada com detalhes mais adiante no item 5.3 - Experimentos Preliminares. Todavia a adaptação consiste basicamente em utilizar o mínimo possível de restrições de subrotas, visto que poucas delas são efetivamente necessárias.

No item 3.3 é apresentado um exemplo para comprovar a eficácia do modelo adaptado com números.

3.3 Exemplo para Adaptação do Modelo

O experimento para se comprovar a eficácia e adequação do modelo adaptado ao problema consiste em achar a solução por meio das duas maneiras, ou seja, o modelo na sua forma original, como sugerido por FISHER e JAIKUMAR [8], e o Modelo Adaptado desenvolvido pelo autor. Achada as duas soluções dever-se-á verificar se as diferenças realmente tornam o Modelo Adaptado mais adequado ao problema.

É importante destacar que ambas as soluções utilizaram o procedimento de se usar o mínimo possível de restrições de subrotas, este procedimento é a segunda parte da adaptação do modelo e será apresentada com detalhes no item 5.3- Experimentos Preliminares.

Ambos os exemplos consideram um único veículo e as 14 escolas atendidas atualmente. Os resultados encontrados estão representados na Tabela 3-4.

| Modelo Escolhido | | Modelo Adaptado | |
|------------------|------------|-----------------|------------|
| Veículo 1 | | Veículo 1 | |
| Escola | Custo (Km) | Escola | Custo (Km) |
| 0 | - | 0 | - |
| 5 | 4,5 | 6 | 0,8 |
| 4 | 4,0 | 7 | 8,5 |
| 11 | 6,3 | 8 | 5,4 |
| 10 | 5,1 | 9 | 8,8 |
| 12 | 13,7 | 1 | 9,4 |
| 13 | 3,0 | 2 | 5,2 |
| 18 | 1,9 | 3 | 7,8 |
| 7 | 11,0 | 5 | 4,9 |
| 8 | 5,4 | 4 | 4,0 |
| 9 | 8,8 | 11 | 6,3 |
| 1 | 9,4 | 10 | 5,1 |
| 2 | 5,2 | 12 | 13,7 |
| 3 | 7,8 | 18 | 2,1 |
| 6 | 5,8 | 13 | 1,5 |
| 0 | 1,2 | 0 | 16,0 |

Tabela 3-4: Exemplo para a diferença entre os modelos

Com este exemplo podem-se perceber duas diferenças significativas entre os dois modelos. A primeira é a redução expressiva da distância percorrida até a última escola: de 91,9 quilômetros para 83,5 (redução de 9,1%). A segunda é a diferença dos itinerários, enquanto no modelo escolhido a última escola atendida (Escola 6) é a escola que se localiza mais próxima à origem (1,2 quilômetros), no modelo adaptado, a última escola atendida (Escola 13) é a escola que se localiza mais afastada da origem (16,0 quilômetros), visto que esta distância é desconsiderada no modelo adaptado, ou seja, ela não entra na função objetivo. Isto acarreta em itinerários com orientações completamente diferentes. Por exemplo, no modelo em sua forma original, as escolas da USP (Escolas 12, 13 e 18) são atendidas no meio do percurso, enquanto no modelo adaptado elas são atendidas ao final do percurso. As últimas distâncias, as de volta à origem, estão destacadas na tabela, pois elas não são percorridas. Porém apesar de não serem percorridas estas

distâncias fazem parte da função objetivo para o modelo em sua forma original e não fazem parte para o modelo adaptado.

É importante destacar que se no modelo adaptado a última distância for incluída na função objetivo, esta irá assumir o valor de 99,5 Km que é maior que os 83,5 quilômetros encontrados pelo modelo original. Este fato evidencia que se o modelo não fosse adaptado, a solução encontrada teria um itinerário até a última escola com um percurso mais longo que outros possíveis itinerários. Isto mostra a importância da adaptação do modelo.

Comprovada a eficácia e adequação ao problema do modelo adaptado, daqui a diante para todas as soluções encontradas serão desconsideradas as distâncias de volta a origem, por meio da atribuição $c_{ij} = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N$ e $j = 0$.

3.4 Dificuldades Encontradas na Construção do Modelo

A natureza combinatória da restrição seis dificulta bastante a aplicação do modelo exato. Mesmo com a utilização de computadores, existiram muitas dificuldades para isso, pois no caso da gráfica do Anglo, têm-se $N = 18$ escolas (clientes), $k = 2$ veículos e como a restrição 6 tem que ser feita para todas as combinações de 2 até 17, dentro da restrição 6 seriam necessárias 262.124 restrições para cada veículo, ou seja, 524.248. A Tabela 3-5 mostra os valores de cada combinação $[C(N,n)]$:

| N | n | C(N,n) |
|-------|----|---------|
| 18 | 2 | 153 |
| 18 | 3 | 816 |
| 18 | 4 | 3.060 |
| 18 | 5 | 8.568 |
| 18 | 6 | 18.564 |
| 18 | 7 | 31.824 |
| 18 | 8 | 43.758 |
| 18 | 9 | 48.620 |
| 18 | 10 | 43.758 |
| 18 | 11 | 31.824 |
| 18 | 12 | 18.564 |
| 18 | 13 | 8.568 |
| 18 | 14 | 3.060 |
| 18 | 15 | 816 |
| 18 | 16 | 153 |
| 18 | 17 | 18 |
| Total | | 262.124 |

Tabela 3-5: Quantidade de restrições de subrotas para 18 escolas

A Tabela 3-6 e seu respectivo gráfico (Gráfico 3-1) mostram em números o aumento exponencial do número de restrições de acordo com o aumento do número de clientes, mostrando a evolução da dimensão do problema conforme se aumenta o número de clientes.

| Nº de Clientes | Nº de Restrições 6 para k = 1 | Nº de Restrições 6 para k = 2 |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 6 |
| 4 | 10 | 20 |
| 5 | 25 | 50 |
| 6 | 56 | 112 |
| 7 | 119 | 238 |
| 8 | 246 | 492 |
| 9 | 501 | 1.002 |
| 10 | 1.012 | 2.024 |
| 11 | 2.035 | 4.070 |
| 12 | 4.082 | 8.164 |
| 13 | 8.177 | 16.354 |
| 14 | 16.368 | 32.736 |
| 15 | 32.751 | 65.502 |
| 16 | 65.518 | 131.036 |
| 17 | 131.053 | 262.106 |
| 18 | 262.124 | 524.248 |

Tabela 3-6: Número de Restrições de subrotas por número de clientes

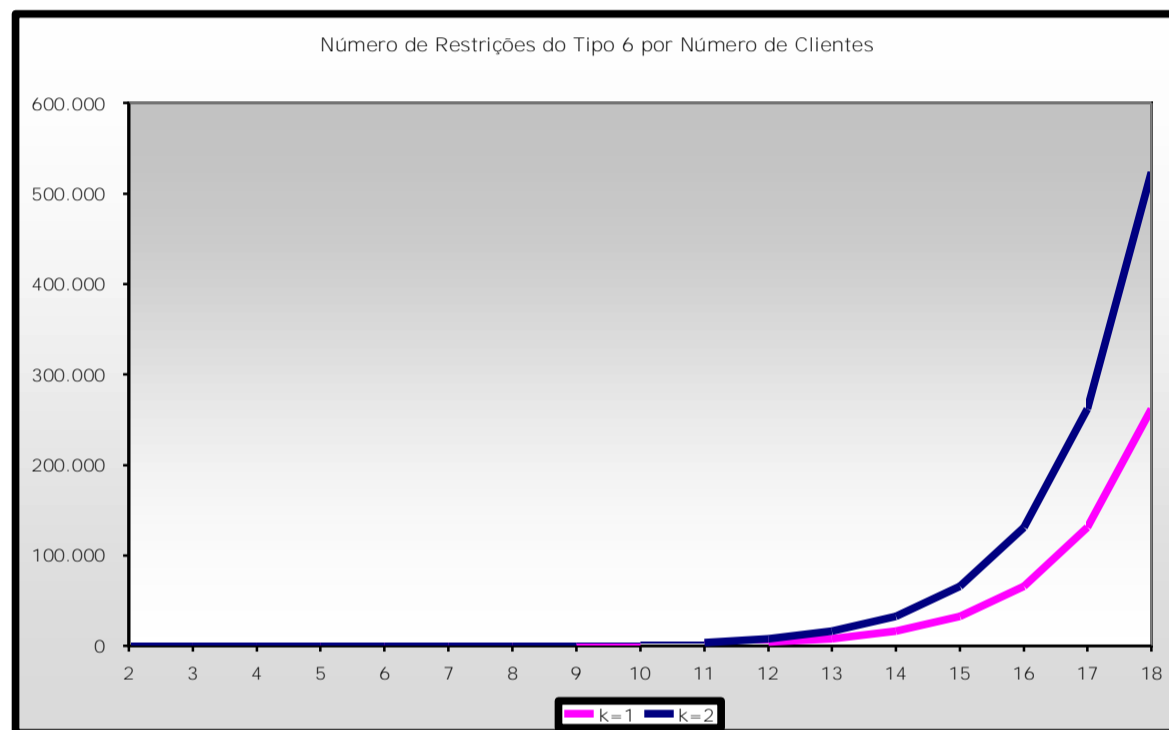


Gráfico 3-1: Número de Restrições de subrota por número de clientes

Para serem geradas tantas restrições foi necessária a utilização de um computador com 768 MB de memória RAM e com um processador de 797 MHz, fornecido pelo GOL (Grupo de Operações e Logística) do Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

4. Resolução do Problema

O primeiro item deste capítulo é destinado ao levantamento dos parâmetros do problema em questão, ou seja, as distâncias entre as escolas (c_{ij}), capacidade máxima dos veículos (Q_k), demanda das escolas (q_j), número de clientes (N) e o número de veículos (M). Isto foi feito para a configuração proposta (18 escolas) já que esta configuração é a mais completa, ou seja, contém todas as escolas da configuração atual (14 escolas) mais quatro.

Já o segundo item deste capítulo mostra como deve ser feita a construção do modelo em Excel para Windows. Isto foi feito de maneira genérica para ser aplicável aos dois casos (Atual: 14 escolas e Proposto: 18 escolas).

E por último, os dois últimos itens mostram as construções dos modelos atual e proposto, bem como a saída do programa para a primeira configuração. A saída para a configuração proposta, bem como sua análise, são feitas no próximo capítulo.

4.1 Levantamento dos Parâmetros

Número de clientes (N) e Número de Veículos (M)

Primeiramente foi feita a listagem de escolas a serem atendidas definindo o número de clientes como $N = 18$. Isto foi feito partindo-se da listagem de locais de exame fornecida pela Fuvest e do interesse de divulgação do material por parte da empresa, que disse estar interessada em divulgá-lo em toda a Grande São Paulo, ampliando o número de escolas atendidas atualmente. Esta listagem está mostrada na Tabela 4-1 de uma forma simplificada.

| ESCOLA | ENDREÇO |
|--|---|
| Origem - Unidade Tamandaré | RUA TAMANDARÉ, 596 |
| Escola 1- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDARES 1-2-3-4-5 | RUA ANTONIO MACEDO, 505 |
| Escola 2- UNIP - CAMPUS ANALIA FRANCO / TÉRREO e ANDARES 1-2 | AV VEREADOR ABEL FERREIRA, 1100 |
| Escola 3- EE ALEXANDRE DE GUSMAO | RUA CISPLATINA, 298 |
| Escola 4- COL E FAC RADIAL-JABAQUARA-UNID J-AND 2-3-4 | AVENIDA JABAQUARA, 1870 |
| Escola 5- FACULDADE DE BELAS ARTES DE SAO PAULO | RUA DR ALVARO ALVIM, 76 |
| Escola 6- UNIP - CAMPUS VERGUEIRO | RUA APENINOS, 267 |
| Escola 7- COLEGIO BATISTA BRASILEIRO | RUA DR HOMEM DE MELLO, 537 |
| Escola 8- UNIP - CAMPUS MARQUES / ANDARES 1-2-3 | AV MARQUES DE S VICENTE, 3001 |
| Escola 9- UNIBAN - CAMPUS MARTE / SALAS 1-18 | AVENIDA BRAS LEME, 3029 - SANTANA |
| Escola 10- FACULDADE RADIAL - UNIDADE G | RUA PROMOTOR GABRIEL NETUZZI PEREZ, 108 |
| Escola 11- EE OSWALDO ARANHA | AVENIDA PORTUGAL, 859 |
| Escola 12- USP / FACULDADE DE EDUCACAO | AVENIDA DA UNIVERSIDADE, 308 |
| Escola 13- USP / ESCOLA POLITECNICA - BIÊNIO e CIVIL | AVENIDA PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 128 |
| Escola 14- UNIBAN - CAMPUS OSASCO | AV DOS AUTONOMISTAS, 1325 |
| Escola 15- EE CONSELHEIRO CRISPINIANO | AVENIDA ARMINDA DE LIMA, 75 |
| Escola 16- EE DR AMERICO BRASILIENSE | PRACA DO IV CENTENARIO, S/N |
| Escola 17- EE JOAO RAMALHO | RUA JOSE BONIFACIO, 102 |
| Escola 18- ECA / USP - BLOCO B | AV PROF LUCIO MARTINS RODRIGUES, 443 |

Tabela 4-1: Listagem simplificada das escolas a serem atendidas. Fonte: Site da Fuvest

A lista de locais de exame fornecida pela Fuvest está no Anexo A e a lista completa das escolas a serem atendidas, no Anexo B.

A origem foi definida pela empresa como sendo a Unidade da Tamandaré.

O número de veículos, como explicado anteriormente, é dois ($M=2$).

Matriz de Distâncias (c_{ij})

Em seguida foram levantadas as distâncias entre todos os colégios (18) e a origem, o que resultou em uma matriz de distâncias, Tabela 4-2:

| Distâncias De / Para (em Km) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | 0 | 13,5 | 11,5 | 7,4 | 7,7 | 4,5 | 0,8 | 7,6 | 11,9 | 8,3 | 15,1 | 10,3 | 11,4 | 14,4 | 24,1 | 22,9 | 22,4 | 23,5 | 13,2 |
| 1 | 15,7 | 0 | 5,2 | 12,1 | 23,1 | 20,0 | 16,3 | 15,7 | 17,1 | 11,9 | 27,9 | 22,7 | 22,7 | 25,8 | 31,7 | 11,1 | 20,5 | 28,8 | 24,5 |
| 2 | 10,1 | 7,2 | 0 | 7,8 | 14,4 | 12,1 | 10,9 | 17,7 | 19,1 | 12,8 | 24,7 | 19,9 | 20,9 | 23,9 | 33,6 | 16,5 | 15,9 | 24,5 | 22,6 |
| 3 | 7,8 | 11,2 | 7,1 | 0 | 7,2 | 4,9 | 5,8 | 12,1 | 17,1 | 11,8 | 17,6 | 13,3 | 15,6 | 18,6 | 27,9 | 24,7 | 16,5 | 17,6 | 17,4 |
| 4 | 9,3 | 21,0 | 15,7 | 9,0 | 0 | 6,4 | 8,8 | 13,2 | 17,8 | 15,8 | 9,5 | 6,3 | 13,2 | 16,2 | 26,7 | 30,4 | 17,8 | 18,9 | 15,0 |
| 5 | 4,7 | 16,4 | 12,2 | 5,5 | 4,0 | 0 | 3,6 | 8,9 | 14,4 | 11,3 | 11,4 | 6,6 | 11,6 | 14,6 | 23,3 | 25,8 | 20,1 | 21,2 | 13,4 |
| 6 | 1,2 | 14,3 | 13,7 | 6,7 | 7,4 | 4,1 | 0 | 8,5 | 12,2 | 9,1 | 16,0 | 11,2 | 12,8 | 15,8 | 25,5 | 23,6 | 21,8 | 23,0 | 14,6 |
| 7 | 7,3 | 14,1 | 17,6 | 16,1 | 12,5 | 9,6 | 7,9 | 0 | 5,4 | 9,0 | 16,0 | 10,9 | 8,9 | 11,9 | 20,4 | 23,4 | 28,4 | 29,5 | 10,7 |
| 8 | 9,8 | 13,9 | 17,4 | 15,9 | 16,3 | 12,4 | 10,4 | 5,0 | 0 | 8,8 | 19,8 | 14,6 | 8,5 | 10,9 | 17,3 | 23,2 | 31,5 | 32,6 | 10,0 |
| 9 | 7,8 | 9,4 | 13,0 | 11,8 | 15,2 | 11,8 | 8,4 | 7,0 | 8,5 | 0 | 20,0 | 14,8 | 14,8 | 17,8 | 23,0 | 18,8 | 27,4 | 28,5 | 16,6 |
| 10 | 13,4 | 25,1 | 22,4 | 15,7 | 10,6 | 10,6 | 12,9 | 16,7 | 21,3 | 20,0 | 0 | 6,0 | 13,7 | 16,7 | 25,6 | 34,5 | 23,1 | 22,5 | 15,4 |
| 11 | 10,2 | 22,5 | 19,2 | 12,5 | 7,4 | 7,4 | 9,7 | 12,4 | 17,0 | 17,3 | 5,1 | 0 | 10,9 | 13,9 | 22,3 | 31,9 | 23,6 | 23,0 | 12,7 |
| 12 | 12,1 | 22,5 | 21,8 | 17,7 | 13,7 | 11,1 | 12,7 | 9,9 | 10,4 | 17,3 | 13,4 | 8,5 | 0 | 3,0 | 13,5 | 31,9 | 29,1 | 30,4 | 2,1 |
| 13 | 16,0 | 25,9 | 25,7 | 21,7 | 16,8 | 15,0 | 16,6 | 13,8 | 15,4 | 20,4 | 16,6 | 11,7 | 3,8 | 0 | 12,6 | 35,0 | 32,2 | 33,6 | 1,9 |
| 14 | 22,5 | 30,3 | 33,9 | 28,2 | 24,2 | 21,6 | 23,1 | 20,3 | 17,1 | 25,3 | 24,1 | 19,2 | 11,8 | 10,9 | 0 | 39,7 | 39,7 | 41,1 | 10,2 |
| 15 | 21,8 | 11,4 | 17,1 | 21,8 | 29,1 | 25,8 | 22,4 | 21,8 | 23,2 | 17,9 | 33,9 | 28,7 | 28,8 | 31,8 | 37,7 | 0 | 30,2 | 38,5 | 30,6 |
| 16 | 22,8 | 18,5 | 13,7 | 16,1 | 20,9 | 19,6 | 23,5 | 29,0 | 32,1 | 26,7 | 23,4 | 22,7 | 29,6 | 32,6 | 43,0 | 29,2 | 0 | 9,1 | 31,4 |
| 17 | 25,4 | 28,8 | 21,5 | 18,8 | 20,8 | 22,3 | 26,2 | 31,7 | 34,7 | 29,4 | 22,9 | 25,0 | 31,9 | 34,9 | 45,3 | 43,2 | 8,8 | 0 | 33,7 |
| 18 | 13,2 | 23,7 | 22,9 | 18,9 | 14,9 | 12,2 | 13,8 | 11,0 | 13,2 | 18,5 | 14,6 | 9,7 | 2,5 | 1,5 | 12,6 | 33,0 | 30,2 | 31,6 | 0 |

Tabela 4-2: Matriz de Distâncias Completa. Fonte: Site Apontador

As distâncias foram obtidas por meio do Site Apontador e para verificar a confiabilidade das distâncias fornecidas, algumas delas foram obtidas percorrendo o caminho e marcando no odômetro do carro. A Tabela 4-3 , a seguir, mostra tal comparação.

| De | Para | Distância (em Km) | | Desvio Absoluto | |
|-----------|-----------|-------------------|--------|-----------------|------------|
| | | Apontador | Medida | Em Km | Percentual |
| Origem | Escola 5 | 4,5 | 4,1 | 0,4 | 8,9% |
| Escola 5 | Escola 11 | 6,6 | 6,2 | 0,4 | 6,1% |
| Escola 11 | Escola 12 | 10,9 | 10,2 | 0,7 | 6,4% |
| Escola 12 | Escola 13 | 3,0 | 2,9 | 0,1 | 3,3% |
| Escola 13 | Escola 18 | 1,9 | 2,0 | 0,1 | 5,3% |
| Escola 18 | Escola 13 | 1,5 | 1,4 | 0,1 | 6,7% |
| Escola 13 | Escola 12 | 3,8 | 3,5 | 0,3 | 7,9% |
| Escola 12 | Escola 11 | 8,5 | 8,8 | 0,3 | 3,5% |
| Escola 11 | Escola 5 | 7,4 | 7,4 | 0,0 | 0,0% |
| Escola 5 | Origem | 4,7 | 4,6 | 0,1 | 2,1% |

Tabela 4-3: Comparação entre as distâncias obtidas (Apontador) e medidas.

De acordo com o Teste de Hipótese feito com significância de 5%, pode-se concluir que as diferenças entre as distâncias obtidas e medidas são desprezíveis.

Este teste foi baseado no COSTA NETO [5] e está apresentado, com maiores detalhes, no Anexo C.

Porém, como explicado no item 3.2 - Adaptação do Modelo, as distâncias de volta à origem serão substituídas por zero ($c_{ij} = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, 18$ e $j = 0$ por zero). Resultando na forma definitiva da matriz de distâncias.

| Distâncias De / Para (em Km) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | 0 | 13,5 | 11,5 | 7,4 | 7,7 | 4,5 | 0,8 | 7,6 | 11,9 | 8,3 | 15,1 | 10,3 | 11,4 | 14,4 | 24,1 | 22,9 | 22,4 | 23,5 | 13,2 |
| 1 | 0,0 | 0 | 5,2 | 12,1 | 23,1 | 20,0 | 16,3 | 15,7 | 17,1 | 11,9 | 27,9 | 22,7 | 22,7 | 25,8 | 31,7 | 11,1 | 20,5 | 28,8 | 24,5 |
| 2 | 0,0 | 7,2 | 0 | 7,8 | 14,4 | 12,1 | 10,9 | 17,7 | 19,1 | 12,8 | 24,7 | 19,9 | 20,9 | 23,9 | 33,6 | 16,5 | 15,9 | 24,5 | 22,6 |
| 3 | 0,0 | 11,2 | 7,1 | 0 | 7,2 | 4,9 | 5,8 | 12,1 | 17,1 | 11,8 | 17,6 | 13,3 | 15,6 | 18,6 | 27,9 | 24,7 | 16,5 | 17,6 | 17,4 |
| 4 | 0,0 | 21,0 | 15,7 | 9,0 | 0 | 6,4 | 8,8 | 13,2 | 17,8 | 15,8 | 9,5 | 6,3 | 13,2 | 16,2 | 26,7 | 30,4 | 17,8 | 18,9 | 15,0 |
| 5 | 0,0 | 16,4 | 12,2 | 5,5 | 4,0 | 0 | 3,6 | 8,9 | 14,4 | 11,3 | 11,4 | 6,6 | 11,6 | 14,6 | 23,3 | 25,8 | 20,1 | 21,2 | 13,4 |
| 6 | 0,0 | 14,3 | 13,7 | 6,7 | 7,4 | 4,1 | 0 | 8,5 | 12,2 | 9,1 | 16,0 | 11,2 | 12,8 | 15,8 | 25,5 | 23,6 | 21,8 | 23,0 | 14,6 |
| 7 | 0,0 | 14,1 | 17,6 | 16,1 | 12,5 | 9,6 | 7,9 | 0 | 5,4 | 9,0 | 16,0 | 10,9 | 8,9 | 11,9 | 20,4 | 23,4 | 28,4 | 29,5 | 10,7 |
| 8 | 0,0 | 13,9 | 17,4 | 15,9 | 16,3 | 12,4 | 10,4 | 5,0 | 0 | 8,8 | 19,8 | 14,6 | 8,5 | 10,9 | 17,3 | 23,2 | 31,5 | 32,6 | 10,0 |
| 9 | 0,0 | 9,4 | 13,0 | 11,8 | 15,2 | 11,8 | 8,4 | 7,0 | 8,5 | 0 | 20,0 | 14,8 | 14,8 | 17,8 | 23,0 | 18,8 | 27,4 | 28,5 | 16,6 |
| 10 | 0,0 | 25,1 | 22,4 | 15,7 | 10,6 | 10,6 | 12,9 | 16,7 | 21,3 | 20,0 | 0 | 6,0 | 13,7 | 16,7 | 25,6 | 34,5 | 23,1 | 22,5 | 15,4 |
| 11 | 0,0 | 22,5 | 19,2 | 12,5 | 7,4 | 7,4 | 9,7 | 12,4 | 17,0 | 17,3 | 5,1 | 0 | 10,9 | 13,9 | 22,3 | 31,9 | 23,6 | 23,0 | 12,7 |
| 12 | 0,0 | 22,5 | 21,8 | 17,7 | 13,7 | 11,1 | 12,7 | 9,9 | 10,4 | 17,3 | 13,4 | 8,5 | 0 | 3,0 | 13,5 | 31,9 | 29,1 | 30,4 | 2,1 |
| 13 | 0,0 | 25,9 | 25,7 | 21,7 | 16,8 | 15,0 | 16,6 | 13,8 | 15,4 | 20,4 | 16,6 | 11,7 | 3,8 | 0 | 12,6 | 35,0 | 32,2 | 33,6 | 1,9 |
| 14 | 0,0 | 30,3 | 33,9 | 28,2 | 24,2 | 21,6 | 23,1 | 20,3 | 17,1 | 25,3 | 24,1 | 19,2 | 11,8 | 10,9 | 0 | 39,7 | 39,7 | 41,1 | 10,2 |
| 15 | 0,0 | 11,4 | 17,1 | 21,8 | 29,1 | 25,8 | 22,4 | 21,8 | 23,2 | 17,9 | 33,9 | 28,7 | 28,8 | 31,8 | 37,7 | 0 | 30,2 | 38,5 | 30,6 |
| 16 | 0,0 | 18,5 | 13,7 | 16,1 | 20,9 | 19,6 | 23,5 | 29,0 | 32,1 | 26,7 | 23,4 | 22,7 | 29,6 | 32,6 | 43,0 | 29,2 | 0 | 9,1 | 31,4 |
| 17 | 0,0 | 28,8 | 21,5 | 18,8 | 20,8 | 22,3 | 26,2 | 31,7 | 34,7 | 29,4 | 22,9 | 25,0 | 31,9 | 34,9 | 45,3 | 43,2 | 8,8 | 0 | 33,7 |
| 18 | 0,0 | 23,7 | 22,9 | 18,9 | 14,9 | 12,2 | 13,8 | 11,0 | 13,2 | 18,5 | 14,6 | 9,7 | 2,5 | 1,5 | 12,6 | 33,0 | 30,2 | 31,6 | 0 |

Tabela 4-4: Matriz de Distâncias, fonte: site Apontador

Demandas dos Colégios (q_i) e Capacidade dos Veículos (Q_k)

O próximo passo foi obter as demandas dos colégios. Elas foram fornecidas pela própria empresa assim como as capacidades dos veículos. A Tabela 4-5 mostra estes valores:

| Escolas | Demanda (Quantidade de alunos) |
|---------|--------------------------------|
| 1 | 1.486 |
| 2 | 306 |
| 3 | 382 |
| 4 | 872 |
| 5 | 768 |
| 6 | 1.114 |
| 7 | 543 |
| 8 | 1.093 |
| 9 | 1.203 |
| 10 | 1.064 |
| 11 | 610 |
| 12 | 657 |
| 13 | 1.665 |
| 14 | 1.315 |
| 15 | 590 |
| 16 | 1.066 |
| 17 | 695 |
| 18 | 262 |
| Total | 15.691 |

| Veículos | Capacidade (Quantidade de exemplares) |
|----------|---------------------------------------|
| k=1 | 12.000 |
| k=2 | 12.000 |
| Total | 24.000 |

Tabela 4-5: Demandas e Capacidades fornecidos pelo Anglo

4.2 Construção Genérica do modelo

Principalmente devido à estrutura matricial do modelo escolhido e pela adequação desta ferramenta a problemas de programação linear inteira, o seu desenvolvimento será feito em Microsoft Excel 97 para Windows. Outros motivos desta escolha são apresentados no capítulo 3 no qual é apresentado o software de otimização escolhido.

As Variáveis

Para as variáveis X_{ijk} são feitas M matrizes com $N+1$ linhas e $N+1$ colunas ($(N+1) \times (N+1)$), já que se têm N escolas, mais uma origem, e M veículos.

Para as variáveis Y_{ik} é feita uma matriz $N+1 \times M$, já que se têm N escolas, mais uma origem, e M veículos.

A Função Objetivo

$$\text{Função objetivo (1): } \min Z = \sum_{i,j}^N (C_{ij} \sum_1^M X_{ijk})$$

A função objetivo é feita da seguinte maneira: Dado um par (i,j) soma-se todas as M variáveis X_{ij} e multiplica-se esta soma pelo respectivo custo do trajeto $[c_{ij} \cdot (X_{ij1} + X_{ij2} + \dots + X_{ijM})]$. Desta maneira se obtém uma matriz $N+1 \times N+1$ chamada de Matriz Objetivo, somando todos os valores desta matriz, obtém-se a função objetivo a ser minimizada.

As Restrições

$$\text{Restrição (2): } \sum_1^M Y_{ik} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Esta restrição é feita a partir da matriz de Variáveis Y , somando-se as linhas, referentes às escolas, e igualando a um, são N linhas, uma para cada escola.

$$\text{Restrição (3): } \sum_1^M Y_{0k} = M$$

Esta restrição também é feita a partir da matriz de Variáveis Y , somando-se a única linha correspondente à origem e igualando esta soma a M já que é o número de veículos.

$$\text{Restrição (4): } \sum_{i=1}^N q_i \cdot Y_{ik} \leq Q_k \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Esta restrição é feita a partir da matriz Variáveis Y , que é uma matriz $N+1 \times M$, multiplicando-se $q_i \cdot Y_{ik}$ com i variando de 1 até N e k variando de 1 até M . Feito isso se obtém uma outra matriz com N linhas e M colunas, a soma de cada coluna deve ser menor ou igual à capacidade do veículo referente àquela coluna.

A Tabela 4-6 nomeia, especifica, classifica e mostra as dimensões de todas as matrizes de uma forma resumida.

| Matriz | Especificações | Tamanho | Classificação |
|-------------|--|------------------|--------------------------|
| Distâncias | $c_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ | $N+1 \times N+1$ | Custos |
| Variáveis X | $X_{ij1}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ | $N+1 \times N+1$ | Variáveis "X" para $K=1$ |
| Variáveis X | $X_{ij2}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ | $N+1 \times N+1$ | Variáveis "X" para $K=2$ |
| ... | ... | ... | ... |
| Variáveis X | $X_{ijM}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ | $N+1 \times N+1$ | Variáveis "X" para $K=M$ |
| Variáveis Y | $Y_{ik}, i = 0, 1, 2, \dots, N$ e $k = 0, 1, 2, \dots, M$ | $N+1 \times M$ | Variáveis "Y" |
| Objetivo | $c_{ij} \cdot (X_{ij1} + X_{ij2} + \dots + X_{ijM}), i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ | $N+1 \times N+1$ | Função Objetivo |
| Restrição 4 | $q_i \times Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, N$ e $k = 1, 2, \dots, M$ | $N \times M$ | Restrição 4 |

Tabela 4-6: Nomes e especificações das matrizes genéricas

$$\text{Restrição(5): } \sum_{j=0}^N X_{ijk} = \sum_{j=0}^N X_{jik} = Y_{ik} \quad i = 0, \dots, N \quad k = 1, \dots, M.$$

Existem $2 \times N \times M$ restrições deste tipo, $2 \times N$ para cada veículo. Para um certo veículo k , elas são obtidas das matrizes de variáveis X para o veículo k

considerado, por meio da soma das linhas se obtêm

$$\sum_{j=0}^N X_{ijk} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, N \quad k=1, \dots, M. \text{ e por meio da soma das}$$

$$\text{colunas se obtêm } \sum_{j=0}^N X_{jik} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, N \quad k=1, \dots, M.$$

$$\text{Restrição (6): } \sum_{i,j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, 2 \leq |S| \leq N - 1$$

Esta restrição pode ser extremamente numerosa, dependendo do número N de clientes, como já foi mostrado (são M vezes a combinação dos N clientes de 2 até $N-1$). Estas numerosas restrições também são obtidas das matrizes de variáveis X para o veículo k . Devido a sua complexidade, as somas têm que ser geradas por meio de um algoritmo que será apresentado mais adiante.

5. Obtenção e Análise de Resultados

5.1 Construção do Modelo para a Configuração Atual

Antes de se aplicar o Modelo Adaptado para a configuração proposta de 18 escolas, é interessante achar a solução para a configuração atual, com 14 escolas, para se mostrar a eficácia do Modelo.

A Tabela 5-1 mostra o itinerário atual feito de modo empírico pela empresa, que será usado como base para comparação com a solução encontrada. O itinerário atual está disposto na coluna i , a quantidade de material a ser distribuída na escola i na coluna q_i e o custo de chegar ao destino i na coluna “custo”. Ao final da tabela, na linha “TOTAL”, está representada a quantidade de material a ser entregue e a soma das distâncias percorridas pelos dois veículos. Os tempos de duração dos percursos de ida (da origem até a última escola) foram fornecidos pelo Anglo e foram marcados no atendimento do Vestibular de 2003. O ideal era existir um histórico de intervalos de tempos, para se fazer uma estimativa de velocidade média mais factível, porém a empresa nunca havia feito este tipo de coleta de dados.

| Veículo 1 | | | Veículo 2 | | |
|-------------------------|----------------|------------|-------------------------|----------------|------------|
| i | q _i | Custo (Km) | i | q _i | Custo (Km) |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 6 | 1.114 | 0,8 | 11 | 610 | 10,3 |
| 9 | 1.203 | 9,1 | 10 | 1.064 | 5,1 |
| 1 | 1.486 | 9,4 | 13 | 1.665 | 16,7 |
| 2 | 306 | 5,2 | 18 | 262 | 1,9 |
| 3 | 382 | 7,8 | 12 | 657 | 2,5 |
| 4 | 872 | 7,2 | 7 | 543 | 9,9 |
| 5 | 768 | 6,4 | 8 | 1.093 | 5,4 |
| TOTAL | 6.131 | 45,9 | TOTAL | 5.894 | 51,8 |
| TEMPO | | 2h 0min | TEMPO | | 2h 20min |
| Velocidade Média (Km/h) | | 23,0 | Velocidade Média (Km/h) | | 22,2 |

Tabela 5-1: Itinerário Atual

Somando-se as distâncias percorridas pelos dois veículos, obtém-se a distância total percorrida de 97,7 Km. Este valor será usado para a comparação com a solução encontrada.

Como estas duas velocidades médias são as únicas possíveis de serem calculadas, visto que não existem dados dos anos anteriores um valor médio de 23,0 Km/h para o veículo 1 e 22,2 Km/h para o veículo 2 serão usados para a estimativa dos tempos de atendimento das soluções a serem encontradas. Valor que pode ser considerado uma boa aproximação já que, conforme reportado pelos motoristas, os tempos de atendimento não se afastam muito destes valores.

Para se encontrar a solução deve se construir o modelo baseado no modelo genérico apresentado com quatorze escolas ($N=14$) e dois veículos ($M=2$). As quatro escolas que não estão presentes nesta configuração, e que estão presentes na proposta, são as escolas de 14 a 17. Portanto, para a configuração atual têm-se:

| Matriz | Especificações | Tamanho | Classificação |
|-------------|---|---------|------------------------|
| Distâncias | $c_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 14$ | 15x15 | Custos |
| Variáveis X | $X_{ij1}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 14$ | 15x15 | Variáveis "X" para K=1 |
| Variáveis X | $X_{ij2}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 14$ | 15x15 | Variáveis "X" para K=2 |
| Variáveis Y | $Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, 14$ e $k = 1, 2$ | 14x2 | Variáveis "Y" |
| Objetivo | $c_{ij} \cdot (X_{ij1} + X_{ij2}), i, j = 0, 1, 2, \dots, 14$ | 15x15 | Função Objetivo |
| Restrição 4 | $q_i \times Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, 14$ e $k = 1, 2$ | 14 x 2 | Restrição 4 |

Tabela 5-2: Matrizes para a Configuração Atual

O modelo encontrou a solução em 19 horas 42 minutos, com tolerância do ótimo de 5% e tolerância de variáveis inteiras de 0,01. A solução encontrada foi de 77,7 quilômetros que comparada com a distância percorrida atual (97,7 Km) é 20,0 quilômetros menor (20,6 %). O relatório de saída completo do What's Best é apresentado no Anexo D.

A Tabela 5-3 mostra o itinerário da solução encontrada para a configuração atual.

| Veículo 1 | | | Veículo 2 | | |
|-------------------------|----------------|------------|-------------------------|----------------|------------|
| i | q _i | Custo (Km) | i | q _i | Custo (Km) |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 6 | 1.114 | 0,8 | 7 | 543 | 7,6 |
| 9 | 1.203 | 9,1 | 8 | 1.093 | 5,4 |
| 1 | 1.486 | 9,4 | 12 | 657 | 8,5 |
| 2 | 306 | 5,2 | 18 | 262 | 2,1 |
| 3 | 382 | 7,8 | 13 | 1.665 | 1,5 |
| 5 | 768 | 4,9 | | | |
| 4 | 872 | 4,0 | | | |
| 11 | 610 | 6,3 | | | |
| 10 | 1.064 | 5,1 | | | |
| TOTAL | 7.805 | 52,6 | TOTAL | 4.220 | 25,1 |
| Velocidade Média (Km/h) | | 23,0 | Velocidade Média (Km/h) | | 22,2 |
| TEMPO ESTIMADO | | 2h 18min | TEMPO ESTIMADO | | 1h 8min |

Tabela 5-3: Itinerário Atual Encontrado

É importante destacar o significado dos totais apresentados na Tabela 5-3. O total da coluna q(i) mostra a quantidade de material que cada veículo terá que carregar, note que este valor é menor que a capacidade dos veículos (12.000 exemplares), já que existia uma restrição que evitava a alocação de mais material do que o veículo fosse capaz de carregar. Já o total da coluna “custo” mostra a soma das distâncias, em Km, que os dois veículos deverão percorrer, note que a soma dos dois custos totais é igual a 77,7 Km, que é o resultado da função objetivo.

A Tabela 5-4, a seguir, faz uma comparação entre os dois itinerários.

| Itinerário Atual Encontrado | | | Itinerário Atual | | |
|-----------------------------|----------------|------------|------------------|----------------|------------|
| i | q _i | Custo (Km) | i | q _i | Custo (Km) |
| Veículo 1 | | | Veículo 1 | | |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 6 | 1.114 | 0,8 | 6 | 1.114 | 0,8 |
| 9 | 1.203 | 9,1 | 9 | 1.203 | 9,1 |
| 1 | 1.486 | 9,4 | 1 | 1.486 | 9,4 |
| 2 | 306 | 5,2 | 2 | 306 | 5,2 |
| 3 | 382 | 7,8 | 3 | 382 | 7,8 |
| 5 | 768 | 4,9 | 4 | 872 | 7,2 |
| 4 | 872 | 4,0 | 5 | 768 | 6,4 |
| 11 | 610 | 6,3 | | | |
| 10 | 1.064 | 5,1 | | | |
| Total 1 | 6.131 | 52,6 | Total 1 | 6.131 | 45,9 |
| Tempo Estimado | | 2h 18min | Tempo | | 2h 0min |
| Veículo 2 | | | Veículo 2 | | |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 7 | 543 | 7,6 | 11 | 610 | 10,3 |
| 8 | 1.093 | 5,4 | 10 | 1.064 | 5,1 |
| 12 | 657 | 8,5 | 13 | 1.665 | 16,7 |
| 18 | 262 | 2,1 | 18 | 262 | 1,9 |
| 13 | 1.665 | 1,5 | 12 | 657 | 2,5 |
| | | | 7 | 543 | 9,9 |
| | | | 8 | 1.093 | 5,4 |
| Total 2 | 4.220 | 25,1 | Total 2 | 5.894 | 51,8 |
| Tempo Estimado | | 1h 8min | Tempo | | 2h 20min |
| TOTAL | 12.025 | 77,7 | TOTAL | 12.025 | 97,7 |

Tabela 5-4: Comparação: Atual Encontrado e Atual

Analisando os valores da Tabela 5-4, pode-se perceber que esta diminuição da distância percorrida de 20,0 quilômetros foi resultado de algumas alterações na designação atualmente feita, principalmente para o segundo veículo, ou seja, analisando as designações de escolas aos veículos pode-se notar que houve a seguinte alteração: as escolas 11 e 10, que eram antes atendidas pelo segundo veículo, devem ser atendidas pelo primeiro veículo.

Quanto aos itinerários, para o primeiro veículo existem duas alterações: primeira, inverter a ordem de atendimento entre as escolas 4 e 5 e a segunda, finalizar o

percurso passando pelas escolas da região de Santo Amaro (11 e 10). Já para o segundo veículo existem bastantes alterações, pois as primeiras escolas a serem atendidas (escola 10 e 11) foram retiradas do itinerário juntamente, isso provocou uma mudança de direção no caminho a ser feito por este veículo, antes ele saía em direção as duas escolas de Santo Amaro (10 e 11) e depois seguia em direção à USP (escolas 12, 13 e 18) para na volta à origem passar pela Escola de Perdizes (escola 7). Para a solução encontrada, as escolas de Perdizes e Água Branca (respectivamente escolas 7 e 8) devem ser as primeiras a serem atendidas. A USP passou para o fim do percurso, havendo uma pequena alteração na ordem de atendimento de suas três escolas, ao invés de atender a Faculdade de Educação ao sair da Universidade, deve-se atender ao entrar.

A análise das alterações dos itinerários mostra a necessidade da utilização de modelos científicos para resolver problemas antes resolvidos empiricamente visto que as maiorias das melhorias não são facilmente dedutíveis.

Porém, o trabalho visa atender o número máximo de escolas possíveis (18), para isso é necessário levantar novamente os parâmetros e construir o modelo outra vez, desta vez com um número maior de variáveis e parâmetros, por isso se espera que a solução seja encontrada em mais tempo.

5.2 Construção do Modelo para a Configuração Proposta

A construção do modelo para a configuração proposta é mostrada de forma mais detalhada por fazer parte da proposta do trabalho.

As Variáveis

Para as variáveis X_{ijk} foram feitas duas matrizes 19 x 19, já que se têm 18 escolas, uma origem e dois veículos.

Para as variáveis Y_{ik} foi feita uma matriz 18 x 2, já que se têm 18 escolas e 2 veículos.

A Função Objetivo

$$\text{Função objetivo (1): } \min Z = \sum_{i,j=0}^{18} (C_{ij} \sum_1^2 X_{ijk})$$

A função objetivo foi feita somando-se cada par X_{ij} e multiplicando este valor pelo seu respectivo custo $[c_{ij} \cdot (X_{ij1} + X_{ij2})]$. Desta maneira se obteve uma matriz 19 x 19 chamada de matriz Objetivo, somando todos os 361 valores desta matriz, foi obtido a função objetivo a ser minimizada.

As Restrições

$$\text{Restrição (2): } \sum_1^2 Y_{ik} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 18$$

Esta restrição foi feita a partir da matriz de variáveis Y , somando-se as linhas e igualando a um, elas são 18, uma para cada escola.

$$\text{Restrição (3): } \sum_1^2 Y_{0k} = 2$$

Esta restrição também foi feita a partir da matriz de variáveis Y , somando-se a única linha correspondente à origem e igualando esta soma a 2 já que são dois veículos.

$$\text{Restrição (4): } \sum_{i=1}^{18} q_i \cdot Y_{ik} \leq Q_k \quad k = 1, 2.$$

Esta restrição é feita a partir da matriz Variáveis Y , que é uma matriz 19×2 , multiplicando-se $q_i \cdot Y_{ik}$ com i variando de 1 até 19 e k variando de 1 até 2. Feito isso se obtém uma outra matriz com 19 linhas e 2 colunas, a soma de cada coluna deve ser menor ou igual à capacidade do veículo referente àquela coluna.

A Tabela 4-6 nomeia, especifica, classifica e mostra as dimensões de todas as matrizes de uma forma resumida.

| Matriz | Especificações | Tamanho | Classificação |
|-------------|---|----------------|--------------------------|
| Distâncias | $c_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 18$ | 19×19 | Custos |
| Variáveis X | $X_{ij1}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 18$ | 19×19 | Variáveis "X" para $K=1$ |
| Variáveis X | $X_{ij2}, i, j = 0, 1, 2, \dots, 18$ | 19×19 | Variáveis "X" para $K=2$ |
| Variáveis Y | $Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, 18$ e $k = 2$ | 18×2 | Variáveis "Y" |
| Objetivo | $c_{ij} \cdot (X_{ij1} + X_{ij2}), i, j = 0, 1, 2, \dots, 18$ | 19×19 | Função Objetivo |
| Restrição 4 | $q_i \times Y_{ik}, i = 1, 2, \dots, 18$ e $k=2$ | 18×2 | Restrição 4 |

Tabela 5-5: Nomes e especificações das matrizes.

$$\text{Restrição(5): } \sum_{j=0}^{18} X_{ijk} = \sum_{j=0}^{18} X_{jik} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, 18 \quad k=1, 2.$$

Existem 76 restrições deste tipo, 38 para cada veículo. Elas são obtidas das matrizes de variáveis X para o veículo 1 e para o veículo 2, por meio da soma das

linhas se obtêm $\sum_{j=0}^{18} X_{ijk} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, 18 \quad k=1, 2.$ e por meio da soma das

colunas se obtêm $\sum_{j=0}^{18} X_{jik} = Y_{ik} \quad i=0, \dots, 18 \quad k=1, 2.$

$$\text{Restrição (6): } \sum_{i, j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq \{1, 2, \dots, 18\}, 2 \leq |S| \leq 17$$

Como já foi mostrado existem 524.248 restrições deste tipo, 262.124 para cada veículo. Elas também são obtidas das matrizes de variáveis X para o veículo 1 para o veículo 2. Devido a sua complexidade, as somas tiveram que ser geradas por meio de um algoritmo desenvolvido pelo autor.

Devido à natureza combinatorial da restrição de sub-rotas o algoritmo para gerá-las se tornou extremamente extenso. Portanto este algoritmo primeiramente será apresentado de maneira esquemática, apenas com o objetivo de fornecer a idéia geral. O algoritmo completo em linguagem de VBA está disposto no Anexo F.

Antes de mostrar o algoritmo é necessário explicar o que são os números de entrada. Estes números foram gerados no Excel e representam as escolas que farão parte da restrição. Por exemplo, para a restrição de subrota entre as escolas 1 e 2 os números de entrada se encontram na mesma linha e em colunas consecutivas e seus valores são 1 e 2. Na linha seguinte os números de entrada serão 1 e 3 e serão usados para gerar a soma da restrição 6 para estas escolas, e

assim por diante. A Tabela 5-6 representa como estes números estão dispostos para os casos de subrota de duas e três escolas e como deve ser saída do programa.

| Linha (L) | var01 | var02 | var03 | ... | var17 | Saída |
|-----------|-------|-------|-------|-----|-------|---|
| 1 | 1 | 2 | | ... | | $X_{1,2} + X_{2,1}$ |
| 2 | 1 | 3 | | ... | | $X_{1,3} + X_{3,1}$ |
| ... | | | | | | |
| 17 | 1 | 18 | | ... | | $X_{1,18} + X_{18,1}$ |
| 18 | 2 | 3 | | ... | | $X_{2,3} + X_{3,2}$ |
| 19 | 2 | 4 | | ... | | $X_{2,4} + X_{4,2}$ |
| ... | | | | | | |
| 153 | 17 | 18 | | ... | | $X_{17,18} + X_{18,17}$ |
| 154 | 1 | 2 | 3 | ... | | $X_{1,2} + X_{2,1} + X_{1,3} + X_{3,1} + X_{2,3} + X_{3,2}$ |
| 155 | 1 | 2 | 4 | ... | | $X_{1,2} + X_{2,1} + X_{1,4} + X_{4,1} + X_{2,4} + X_{4,2}$ |
| ... | | | | | | |
| 969 | 16 | 17 | 18 | ... | | $X_{16,17} + X_{17,16} + X_{16,18} + X_{18,16} + X_{17,18} + X_{18,17}$ |
| ... | | | | | | |
| 262.223 | 2 | 3 | 4 | ... | 18 | |

Tabela 5-6: Números de Entrada e a Saída, elaborada pelo autor

Note que na Tabela 5-6 as marcas “...” significam cortes feitos que visam reduzir o tamanho da tabela, dado que a quantidade de números de entrada é muito grande (2.359.260), considerando que eles estão dispostos em 262.223 linhas e chegam a ir de “var 01” até “var 17”. Outro detalhe desta tabela é que, pelo fato da somatória ser muito grande (são 272 variáveis), não é mostrada a saída para o caso da ultima linha.

Algoritmo para obtenção da restrição 6 para o caso de 18 escolas

INÍCIO

Enquanto existirem números de entrada Faça

 Leia Números de Entrada (var 1 até var 17) na linha L

 Verifique, a partir de var 3, qual número de entrada é igual a 0

 Se var n = 0 Então Retorne a soma para sub rota de n -1

 Se não Retorne a soma para sub rota de 17

L = L + 1 ⇒ Segue para a próxima linha

FIM

Mesmo geradas todas as restrições nem todas elas foram ativadas, pois o limite de restrições do software utilizado, é de 16 mil, ainda que esta seja uma versão profissional do What's Best.

5.3 Experimentos Preliminares

Já que o software tem uma limitação do número de restrições, devem ser feitos alguns experimentos computacionais, com a finalidade de verificar o que acontece caso o modelo seja rodado com um número de restrições bem menor que o necessário para se chegar na solução ótima. Para isso foi feito um teste com um modelo reduzido, nove clientes, e se obteve ótimos resultados. Este teste consiste em tentar rodar o programa com o mínimo possível de restrições de subrotas. Lembrando que um problema com dois veículos e até 11 clientes possui restrições suficientes para o software.

Nove clientes possibilitam poucas restrições de subrota (1.002 restrições para cada veículo), mas não se espera que a maioria delas sejam usadas. E como, para

gerar as restrições, neste caso, é bem rápido e simples, o teste é de grande utilidade e de fácil aplicação.

Como era esperada, a primeira saída não retornou uma solução possível, ou seja, foi retornado um roteamento no qual estavam presentes subrotas de dois e três clientes para todo par ou trio de clientes que se localizavam próximos um do outro.

Estas restrições foram violadas, pois as suas ausências possibilitam ligar clientes que estejam bem próximos. Para ilustrar isso, considere o mesmo número de clientes (9) distribuídos da maneira que a Figura 5-1 a seguir mostra, na qual os tamanhos das setas laranjas representam em escala o custo de se percorrer um caminho $i-j$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, 9$) e as setas tracejadas em azul representam alguns custos fictícios caso os arcos representados por elas, fossem escolhidos para fazer parte da solução:

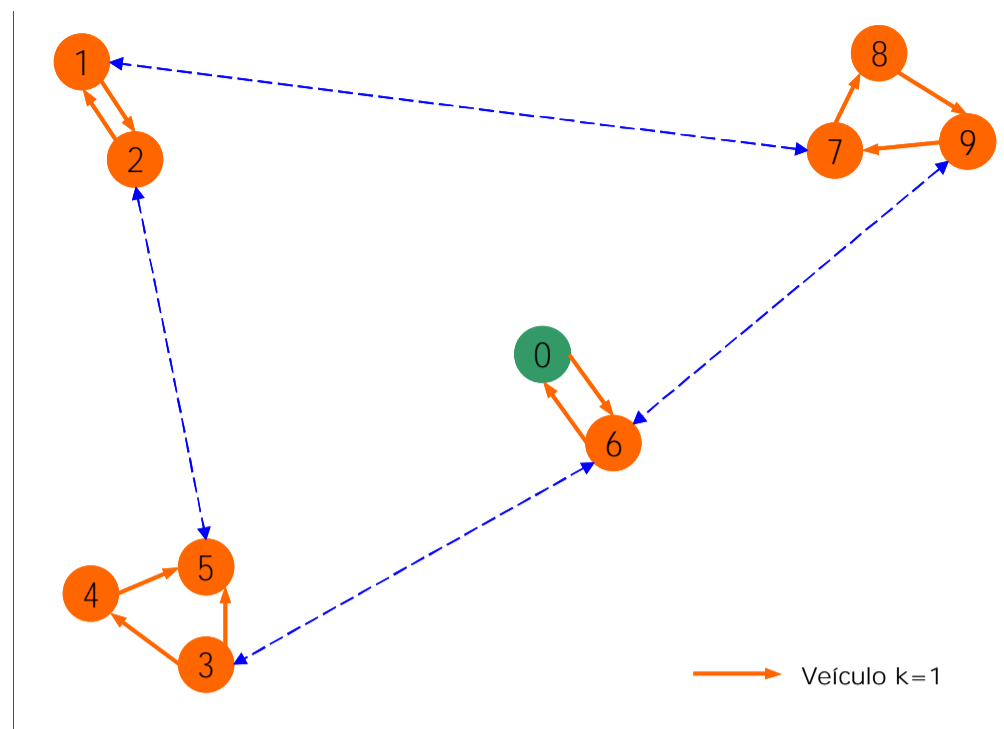


Figura 5-1 : Ilustração para subrotas de dois e três clientes

É fato que a inclusão de qualquer seta azul fará com que a função objetivo seja muito maior.

Também fica fácil de entender porque estas restrições foram violadas, verificando os clientes escolhidos para as subrotas: foram escolhidos os que ficam mais próximos uns dos outros. Por exemplo, o cliente 1 fez par com o cliente 2 e se forem verificadas todas as distâncias para os dois clientes, percebe-se que a menor distância partindo do cliente 1 é indo para o 2 e a menor distância partindo do cliente 2 é indo para o 1. O mesmo verifica-se para a origem e o cliente 6.

Já as subrotas de três são explicadas, pois podem existir três clientes que se localizem quase que igualmente próximos entre si e afastados dos demais, fazendo com que não seja incluída uma subrota para um par destes três clientes deixando o terceiro cliente para uma outra, pois, caso isso aconteça, este cliente que sobrar está muito longe de qualquer outro cliente para fazer parte de uma

solução que minimize a função objetivo. A Figura 5-2 a seguir mostra a diferença entre estas duas situações:

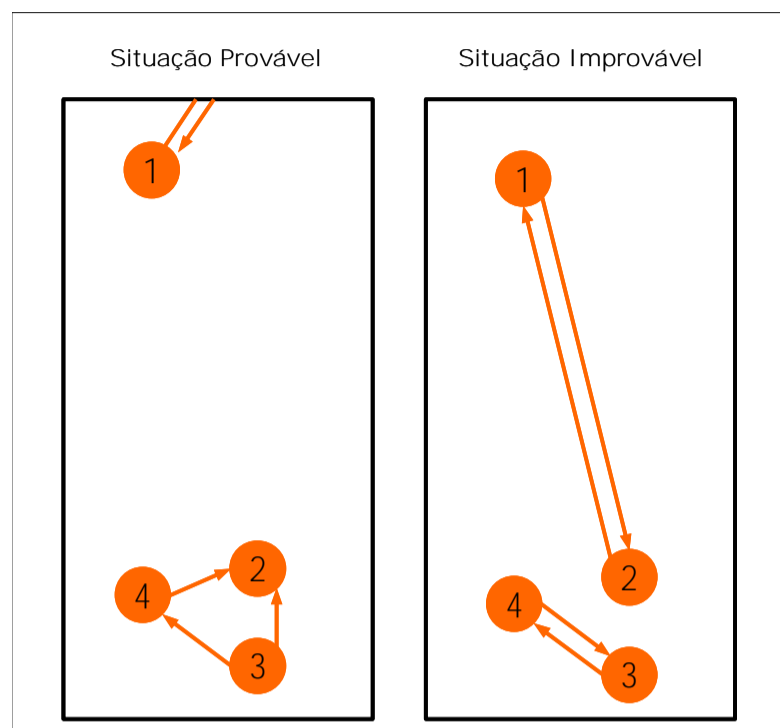


Figura 5-2: Ilustração para subrota de três clientes

Mas como se pretende obter uma solução factível foi necessário ativar esta restrição. Desta forma, rodando o programa novamente, surgiu uma subrota para 8 clientes. Para evitá-la, ela foi ativada e o programa rodado novamente, surgindo um roteamento sem subrotas.

Estes testes permitem concluir que poucas restrições de subrotas são efetivamente usadas. Portanto, mesmo não usando todas as restrições geradas, espera-se encontrar a solução da mesma maneira que foi feita no teste citado, embora tal fato não seja garantido

Com todas as restrições feitas, determinada a função objetivo, definidas as variáveis e levantados os parâmetros, o modelo está pronto para encontrar a solução.

A análise de resultados foi efetuada com base na saída do modelo. A partir das informações contidas nesta saída, foram elaboradas tabelas que permitissem realizar comparações entre a estrutura de itinerários proposta (resultante do modelo) e a estrutura atualmente em vigor (ou estrutura atual). Estas comparações são feitas no item 5.5, no item 5.4 são apresentadas a saída do modelo e sua análise.

5.4 A Saída do Modelo

Primeiramente o modelo foi rodado com as restrições de subrotas para todos os casos de dois, três e quatro escolas e para alguns casos de cinco, que somadas com as outras restrições, totalizaram 16 mil restrições, que é o limite do software.

Como era esperada a primeira solução encontrada continha uma subrota, já que não foi possível inserir todas as restrições deste tipo. A subrota encontrada foi para as escolas 8, 12, 13, 14, 18. Como feito nos experimentos computacionais, apresentados no item 5.2, esta restrição foi ativada e o programa foi rodado novamente.

O modelo encontrou a solução em 49 horas e 38 minutos, com tolerância do ótimo de 5 % e tolerância de variáveis inteiras de 0,01, a solução sem subrotas encontrada foi de 143,0 Km. O relatório de saída completo do What's Best é apresentado no Anexo E.

Os resultados da matriz das variáveis Y_{jk} são os primeiros a ser analisados, já que esta matriz é a que designa cada escola ao seu devido veículo. A Tabela 5-7 a seguir mostra a saída do programa para esta matriz.

| i | k | |
|----|---|---|
| | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 0 |
| 15 | 0 | 1 |
| 16 | 0 | 1 |
| 17 | 0 | 1 |
| 18 | 1 | 0 |

Tabela 5-7: Solução da matriz de variáveis Y_{ik}

Como quando $Y_{ik} = 1$ significa que a escola i foi designada ao veículo k , analisando os valores da Tabela 5-7, pode-se concluir que 9 escolas (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 18) foram designadas ao veículo 1 ($k=1$) e as restantes 9 escolas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 16 e 17) foram designadas para o segundo veículo ($k=2$).

Feita a designação de veículos às escolas, resta saber, para cada veículo, qual é a ordem de atendimento, ou seja, o seu itinerário. Para isso, devem-se analisar os resultados das matrizes de variáveis X_{ijk} , já que é por meio delas que se define o itinerário de cada veículo. A Tabela 5-8 e a Tabela 5-9 mostram a saída do programa para estas matrizes, as linhas sombreadas destas tabelas representam quais escolas os veículos atendem.

| i | j | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 5-8: Solução da matriz de variáveis X_{ij} para $k=1$

| i | j | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 5-9: Solução da matriz de variáveis X_{ij} para $k=2$

Considerando que se $X_{ijk} = 1$ significa que o caminho de i para j foi escolhido no trajeto do veículo k , pode-se definir os itinerários propostos dos dois veículos a partir dos valores apresentados nas duas tabelas anteriores.

A Tabela 5-10 é a saída para a matriz “Objetivo”, nela estão representadas todas as distâncias (custos), em Km, dos caminhos escolhidos para fazerem parte dos percursos dos dois veículos. As distâncias em laranja representam os custos a serem percorridos pelo veículo 1 e as em azul, pelo veículo 2. A soma de todas estas distância representa a função objetivo.

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-----------------|-------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|------|------|------|-----|------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,8 | 0 | 3,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11,1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 7,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18,9 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 6,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17,3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,9 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 13,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8,8 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Função Objetivo | 143,0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Tabela 5-10: Saída da Matriz Objetivo

A Tabela 5-11 é a saída para a matriz da restrição 4, nela são mostradas as demandas designadas a cada veículo, de acordo com as escolas que os veículos atendem. As somas das colunas desta matriz são utilizadas para a restrição de capacidade dos veículos, ou seja, a soma de cada coluna não pode ser maior do que 12 mil.

| i | $q_i * Y_{i1}$ | $q_i * Y_{i2}$ |
|-------|----------------|----------------|
| 0 | - | - |
| 1 | 1.486 | 0 |
| 2 | 306 | 0 |
| 3 | 382 | 0 |
| 4 | 872 | 0 |
| 5 | 768 | 0 |
| 6 | 1.114 | 0 |
| 7 | 0 | 543 |
| 8 | 0 | 1.093 |
| 9 | 0 | 1.203 |
| 10 | 0 | 1.064 |
| 11 | 0 | 610 |
| 12 | 0 | 657 |
| 13 | 0 | 1.665 |
| 14 | 0 | 1.315 |
| 15 | 590 | 0 |
| 16 | 1.066 | 0 |
| 17 | 695 | 0 |
| 18 | 0 | 262 |
| Total | 7.279 | 8.412 |

Tabela 5-11 : Saída da Matriz de Capacidades

A Tabela 5-12 foi montada com base em todas as soluções e saídas do modelo mostradas até aqui e mostra o itinerário proposto nas colunas i , a quantidade de material a ser distribuída na escola i nas colunas q_i e o custo de chegar ao destino i nas colunas “custo”.

| Veículo 1 | | | Veículo 2 | | |
|-------------------------|-------|------------|-------------------------|-------|------------|
| i | q_i | Custo (Km) | i | q_i | Custo (Km) |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 6 | 1.114 | 0,8 | 9 | 1.203 | 8,3 |
| 3 | 382 | 6,7 | 7 | 543 | 7,0 |
| 5 | 768 | 4,9 | 8 | 1.093 | 5,4 |
| 4 | 872 | 4,0 | 14 | 1.315 | 17,3 |
| 17 | 695 | 18,9 | 13 | 1.665 | 10,9 |
| 16 | 1.066 | 8,8 | 18 | 262 | 1,9 |
| 2 | 306 | 13,7 | 12 | 657 | 2,5 |
| 1 | 1.486 | 7,2 | 11 | 610 | 8,5 |
| 15 | 590 | 11,1 | 10 | 1.064 | 5,1 |
| TOTAL | 7.279 | 76,1 | TOTAL | 8.412 | 66,9 |
| Velocidade Média (Km/h) | | 23,0 | Velocidade Média (Km/h) | | 22,2 |
| TEMPO ESTIMADO | | 3h 19min | TEMPO ESTIMADO | | 3h 1min |

Tabela 5-12 : Itinerário proposto

É importante relembrar o significado dos totais apresentados na Tabela 5-12. O total da coluna $q(i)$ mostra a quantidade de material que cada veículo terá que carregar, note que este valor é menor que a capacidade dos veículos (12.000 exemplares), já que existia uma restrição que evitava a alocação de mais material do que o veículo fosse capaz de carregar. Já o total da coluna “custo” mostra a distância em quilômetros que cada veículo deverá percorrer, note que a soma dos dois custos totais é igual a 143,0 Km, que é o resultado da função objetivo.

5.5 Comparações: Atual e Proposto

Para as comparações serem feitas primeiro devem-se apresentar os itinerários atuais e proposto numa tabela comparativa:

| Itinerário Proposto | | | Itinerário Atual | | |
|-------------------------|----------------|------------|-------------------------|----------------|------------|
| i | q _i | Custo (Km) | i | q _i | Custo (Km) |
| Veículo 1 | | | Veículo 1 | | |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 6 | 1.114 | 0,8 | 6 | 1.114 | 0,8 |
| 3 | 382 | 6,7 | 9 | 1.203 | 9,1 |
| 5 | 768 | 4,9 | 1 | 1.486 | 9,4 |
| 4 | 872 | 4,0 | 2 | 306 | 5,2 |
| 17 | 695 | 18,9 | 3 | 382 | 7,8 |
| 16 | 1.066 | 8,8 | 4 | 872 | 7,2 |
| 2 | 306 | 13,7 | 5 | 768 | 6,4 |
| 1 | 1.486 | 7,2 | | | |
| 15 | 590 | 11,1 | | | |
| Total 1 | 7.279 | 76,1 | Total 1 | 6.131 | 45,9 |
| Velocidade Média (Km/h) | | 23,0 | Velocidade Média (Km/h) | | 23,0 |
| TEMPO ESTIMADO | | 3h 19min | TEMPO | | 2h 0min |
| Veículo 2 | | | Veículo 2 | | |
| 0 | - | - | 0 | - | - |
| 9 | 1.203 | 8,3 | 11 | 610 | 10,3 |
| 7 | 543 | 7,0 | 10 | 1.064 | 5,1 |
| 8 | 1.093 | 5,4 | 13 | 1.665 | 16,7 |
| 14 | 1.315 | 17,3 | 18 | 262 | 1,9 |
| 13 | 1.665 | 10,9 | 12 | 657 | 2,5 |
| 18 | 262 | 1,9 | 7 | 543 | 9,9 |
| 12 | 657 | 2,5 | 8 | 1.093 | 5,4 |
| 11 | 610 | 8,5 | | | |
| 10 | 1.064 | 5,1 | | | |
| Total 2 | 8.412 | 66,9 | Total 2 | 5.894 | 51,8 |
| Velocidade Média (Km/h) | | 22,2 | Velocidade Média (Km/h) | | 22,2 |
| TEMPO ESTIMADO | | 3h 1min | TEMPO | | 2h 20min |
| TOTAL | 15.691 | 143,0 | TOTAL | 12.025 | 97,7 |
| Distância Média | | 7,9 | Distância Média | | 7,0 |

Tabela 5-13 : Itinerários Atual e Proposto

Como o número de escolas atendidas é maior para o modelo proposto, os valores de distância percorrida de 143,0 Km para o proposto e 97,7 Km para o atual não devem ser comparadas diretamente. Porém pode se fazer uma comparação por meio da distância média, representada na penúltima linha da Tabela 5-13, que foi calculada como resultado da divisão da Distância Total pelo Número de escolas atendidas (N). Desta comparação pode-se concluir que é distância média

percorrida para a configuração proposta é 12,9% maior do que a distância da configuração atual. Este aumento se deve pela inclusão de 4 escolas que se localizam bem distantes da região antes atendida, assim, mesmo minimizando a distância total percorrida pelos veículos, o percurso médio é maior.

Mas a proposta do trabalho é aumentar a divulgação do material sem aumentos expressivos nos custos, a distância foi minimizada para tornar possível a entrega respeitando o limite de tempo e dentro de uma distribuição tão espaçada das escolas numa cidade tão grande como a de São Paulo. E como se pode verificar a inclusão destas 4 escolas aumentou em 30,5% a entrega dos materiais (15.691 exemplares contra 12.025 do modelo atual).

Análise dos Itinerários: Atual e Proposto

Comparando-se os itinerários, pode-se perceber que é muito difícil encontrar uma solução de maneira empírica que apresente um itinerário parecido com o encontrado pelo modelo, visto que são diversas as alterações nos percursos e designações e muitas delas não muito dedutíveis, como por exemplo, o desvio da rota de atendimento das escolas 1, 2, 3, 4, e 5 para atender as escolas de São Bernardo do Campo e Santo André (respectivamente escolas 17 e 16). Este fato apenas reforça a utilização de modelos científicos para a resolução de problemas deste tipo.

Algumas semelhanças são encontradas nos dois itinerários. As escolas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 continuaram no mesmo percurso, já que são escolas relativamente próximas ao centro da cidade. Apenas uma escola (Escola 9) foi excluída deste percurso. As Escolas 15, 16 e 17 foram incluídas neste percurso por estarem relativamente próximas ao percurso das Escolas de 1 a 5.

Para o outro veículo, a designação apresenta algumas semelhanças. A primeira é trivial que é a escolha das três escolas da USP (Escolas 12, 13 e 18). Também

continuaram na rota do segundo veículo as duas da região de Santo Amaro (Escolas 11 e 10) e a de Perdizes (7). A diferença está na inclusão da escola do Campo de Marte (9) que foi excluída da rota do primeiro veículo. A última escola presente nesta rota é a de Osasco (14) que não estava presente na configuração atual.

O itinerário deste veículo começa pelo atendimento da escola do Campo de Marte(9), seguindo para Perdizes(7) e Água Branca(8), passando na sequência por Osasco(14), USP(13,18 e 12) e Santo Amaro(11 e 10). Este caminho contém distâncias de 17,3 e 10,9 quilômetros que a princípio não pareciam que fariam parte da solução.

A principal observação desta análise dos itinerários é que o modelo é fundamental para a designação e atendimento das 4 escolas acrescidas, visto que aparentemente elas não são alocáveis a nenhuma das rotas e mesmo se designadas, é muito difícil definir, dentre os altos custos que levam a elas, quais devem ser escolhidos.

Objetivo Alcançado

O objetivo do trabalho era encontrar uma solução que tornasse possível, respeitando o limite de tempo, a entrega dos materiais de divulgação do curso pré-vestibular Anglo para as 18 escolas da Fuvest 2003, visando o aumento da quantidade de material divulgado. Visto que tal tarefa não é possível de se fazer de maneira empírica.

Dado que uma modelagem que minimize o tempo de percurso não é possível de ser feita numa cidade tão grande como a de São Paulo, foi utilizado um Modelo que minimiza a distância percorrida e valores de velocidade média fornecidos pela própria empresa.

O tempo disponível para a entrega é de 3 horas e 30 minutos e de acordo com a Tabela 5-13 o primeiro veículo leva 3 horas e 19 minutos para a entrega e o segundo leva 3 horas e 1 minuto. Portanto a solução encontrada atende aos objetivos do trabalho com uma folga de 11 minutos para o primeiro veículo e 29 minutos para o segundo veículo. Estas folgas podem ser vistas como tolerâncias para as variações dos tempos de entrega de acordo com o trânsito do dia.

Análises Finais

Como já foi apresentado, os modelos atual e proposto não têm os mesmos números de escolas a atender, portanto deve-se fazer as comparações por meio dos custos de entrega por material divulgado.

Os custos de entrega englobam apenas os gastos com os profissionais que entregam o material aos candidatos, chamados de entregadores, visto que os custos com o transporte são os mesmos, pois a quantidade de motoristas e veículos é a mesma para os dois modelos. A única diferença com relação aos custos de transporte é o fato de o percurso ser bem maior que o feito atualmente, porém os custos relacionados a este aumento (combustível e manutenção) são desprezíveis se comparados com os custos dos entregadores.

O número de entregadores é maior para o modelo proposto, pois, como são contratados dois entregadores para cada escola e este modelo propõe a entrega para 4 escolas a mais que o modelo atual, deverão ser contratados 8 entregadores a mais do que era contratado no modelo atual para cada dia de entrega. Cada entregador cobra R\$ 35,00 por dia de trabalho. A Tabela 5-14 e o Gráfico 3-1 comparam o modelo atual e o proposto com base nestes dados e nos encontrados no desenvolvimento do trabalho.

| | Proposto | Atual | Diferença | % |
|---|----------|--------|-----------|-------|
| Escolas Atendidas | 18 | 14 | 4 | 28,6% |
| Distância Percorrida (Km) | 143,0 | 97,7 | 45,3 | 46,4% |
| Distância Percorrida Média (Km/escola) | 7,9 | 7,0 | 0,9 | 12,9% |
| Custo dos Entregadores (R\$/dia x pessoa) | 35,00 | 35,00 | - | - |
| Entregadores Contratados por dia | 36 | 28 | 8 | 28,6% |
| Dias de distribuição | 4 | 4 | - | - |
| Custo Total (R\$) | 5.040 | 3.920 | 1.120 | 28,6% |
| Material Divulgado por dia (em exemplares) | 15.691 | 12.025 | 3.666 | 30,5% |
| Material Divulgado no total (em exemplares) | 62.764 | 48.100 | 14.664 | 30,5% |
| Custo Total por Material Divulgado (R\$/100 exemplares) | 8,00 | 8,15 | (0,15) | -1,8% |

Tabela 5-14 : Comparação: Proposto e Atual

Analisando os dados apresentados, devem-se destacar o aumento de escolas atendidas (4 escolas correspondendo a 28,6%), aumento de material divulgado (14.664 correspondendo a 30,5%) e a diminuição de 1,8% nos custos por material divulgado.

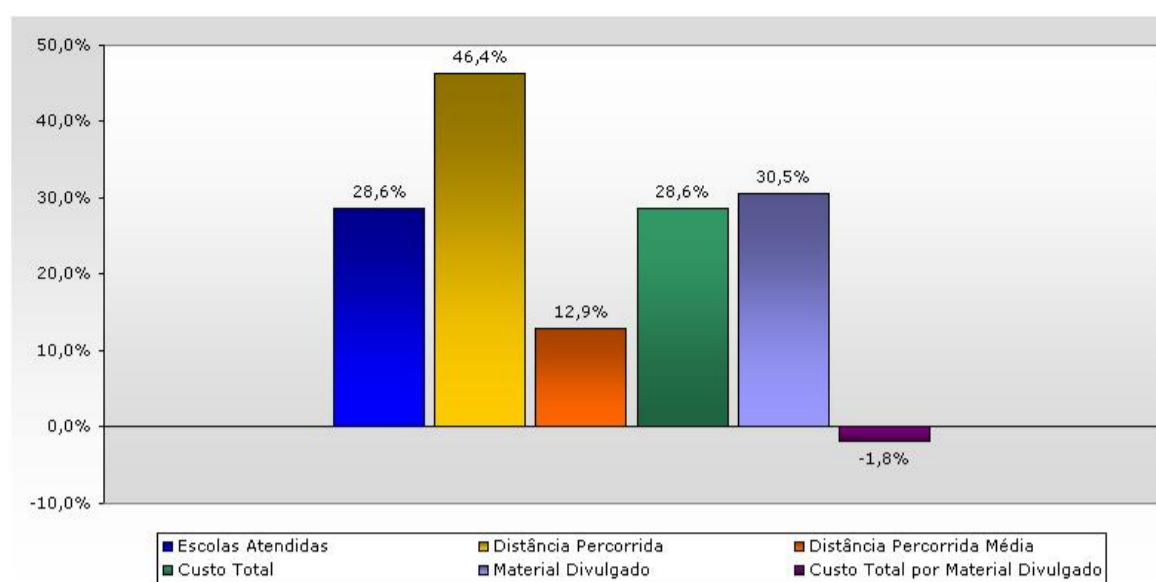


Gráfico 5-1: Diferença Percentual Entre os Modelos Atual e Proposto

O trabalho como um todo visa o aumento de 30,5 % (14.664 exemplares) do material divulgado. Como apresentado no Gráfico 1-2, a quantidade de material estocada para o último vestibular da Fuvest foi de 15.900 exemplares. Com esta ampliação no atendimento a quantidade estocada passará a cerca de 1.336 exemplares, redução de até 92% do estoque. A Tabela 5-15 e o Gráfico 5-2 mostram os valores totais e por matérias.

| FUVEST 2003 | | | |
|----------------------|--|-------------------------------------|--|
| Matéria | Quantidade de Material Estocado Atualmente | Acréscimo na Quantidade Distribuída | Quantidade de Material Estocado Proposta |
| Português | 4.000 | 3.666 | 334 |
| História e Química | 4.100 | 3.666 | 434 |
| Geografia e Biologia | 4.000 | 3.666 | 334 |
| Física | 3.800 | 3.666 | 134 |
| Total | 15.900 | 14.664 | 1.236 |
| Porcentagem | 100% | 92,2% | 7,8% |

Tabela 5-15: Novas Quantidades de Material Estocado

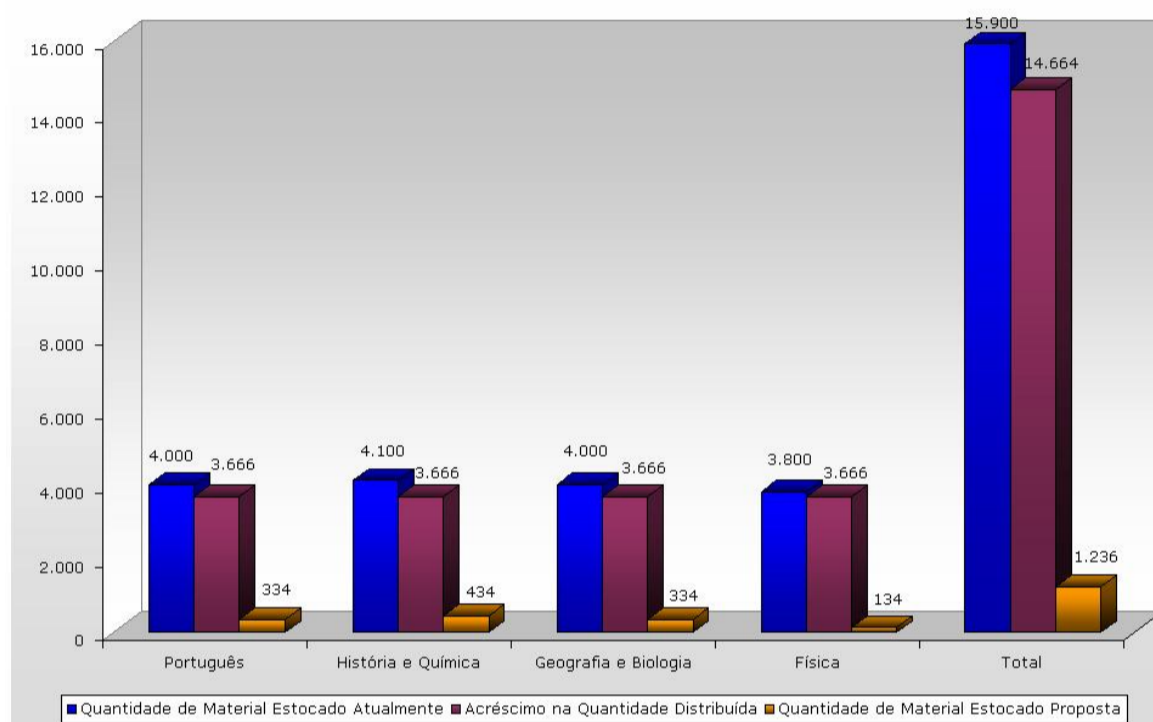


Gráfico 5-2: Novas Quantidades de Material Estocado

6. Conclusão

O presente trabalho apresentou a aplicação de um modelo para o processo de decisão e roteamento de veículos, cumprindo com a função de atribuir uma abordagem científica para uma atividade que vem sendo realizada de forma empírica.

O objetivo do trabalho de tornar possível a entrega do material para todas as escolas da região da Grande São Paulo, respeitando o limite de tempo, foi alcançado. Inclusive com uma certa folga que pode ser considerada como uma tolerância a fatores aleatórios do trânsito.

A análise dos resultados obtidos mostrou uma redução nos custos por material divulgado, o que comprovou que a metodologia aplicada realmente pode auxiliar a empresa no seu processo de decisão, pois com tal metodologia, aumenta-se a divulgação da empresa (escoando quase que todo o restante da produção) e resulta num acréscimo de material distribuído maior que o acréscimo nos custos.

Esse modelo foi aplicado apenas para um vestibular dos diversos que existem no estado de São Paulo, de maneira que o benefício tende a ser ainda maior a medida que o modelo pode ser estendido para os demais vestibulares.

A solução do problema foi obtida com a utilização de um algoritmo exato do clássico modelo de otimização de FISHER e JAIKUMAR [8] “*A Generalized Assignment Heuristics For Vehicle Routing*”. O processo de modelagem foi detalhado passo a passo, com a ajuda de exemplos em escala reduzida.

Como pontos fortes do trabalho pode-se citar novamente a aplicação de um modelo científico a um processo que era feito de maneira empírica e ao alto detalhamento do modelo exato, com destaque para a explicação detalhada da restrição de subrotas, incluindo o desenvolvimento de um algoritmo para gerá-las,

bem como uma maneira de se trabalhar com milhares de restrições deste tipo e por último, pode-se citar a adaptação do modelo ao problema.

Como sugestão de melhoria, propõe-se um detalhamento maior do fator custo, levando em consideração outros fatores que não apenas a distância. O trânsito nas ruas pode ser um fator a se considerar por meio de penalizações dos caminhos mais longos que acabam sendo fortemente influenciados pelo trânsito.

Bibliografia

- [1] BODIN, L., BERMAN, M. (1979), *Routing and Scheduling of School Buses by Computer*. Transportation Science.13, p. 113-129.
- [2] BODIN, L.D., GOLDEN, B.L., ASSAD, A., BALL, M. (1983), *Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art*. Computers and Operations Research, Vol. 10, p. 69-211.
- [3] CHRISTOFIDES, N., EILON, S. (1969), *An algorithm for the vehicle dispatching problem*. Operations Research Quarterly, Vol. 20, p. 309-318.
- [4] CLARKE, G., WRIGHT, J.W. (1964), *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*. Operations Research, Vol. 12, p. 568-581.
- [5] COSTA NETO, P.L.O.(1977), *Estatística*, Editora E. Blücher,p. 108-112.
- [6] DILLMANN, R., BECKER, B. e BECKEFELD, V. (1996), *Practical Aspects Of Route Planning For Magazines And Newspapers Wholesalers*, EJOR 90,1-12
- [7] ELLENRIEDER, A.R.V., (1981) *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Almeida Neves.
- [8] FISHER, M., JAIKUMAR, R. (1981), *A Generalized Assignment Heuristics For Vehicle Routing*. Networks, Vol. 11, p. 109-124
- [9] FISHER, M.L., (1994), *Vehicle Routing. Networks and Distribution*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- [10] GAREY, M.R., JOHNSON, D.S. (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H.Freeman and Company, New York.

-
- [11] GILLETT, B.E., MILLER, L.R. (1974), *A heuristic algorithm for the vehicle-dispatch problem*. *Operations Research*, Vol. 22, p. 341-349.
- [12] GOLDBARG, M.C. LUNA, H.P.L. (2000), *Otimização Combinatória e Programação Linear*, Rio de Janeiro, Campus.
- [13] GOLDEN, B.L., ASSAD, A.A. (1988), *Vehicle Routing: Methods and Studies*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- [14] GOLDEN, B.L., MAGNATI, T.L. e NGUYEN, H.Q. (1977), *Implementing Vehicle Routing Algorithms*. *Networks*, Vol. 7, p. 113-148.
- [15] HERMANN, C.C., MAGEE, F.F. (1963) *Operations Research for Management*, The Mentor Executive Library, New York.
- [16] HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G.J., (1988) *Introdução a Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Campus.
- [17] KAWAMURA, M.S., RONCONI, D.P. e YOSHIZAKI, H. (2002) *Optimizing Transportation and Warehousing of Final Products from the Sugar and Ethanol Industry*. *Computers & Industrial Engineering*.
- [18] LAPORTE, G., (1992), *The Vehicle Routing Problem: an overview of exact and approximate methods*. *EJOR*, Vol. 59, p. 345-358.
- [19] NEWTON, R., THOMAS, W. (1974) *Bus routing in a Multi-School System*. *Computers and Operations Research*.1,p. 213-222.
- [20] SANTORO, M.C., RONCONI, D.P. (2002) *Otimizando Armazenagem e Transporte de Cloreto de Potássio na Indústria de Fertilizantes*. *Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – Natal – RN*
- [21] SCHUSTER, E.W., ALLEN, S.J. *Raw Material Management at Welch´s, Inc*. *Interfaces*, 28:5 Setember-October 1998, p.13-24

[22] What's Best! The Spreadsheet Solver. User's Manual. Lindo Systems Inc. Chicago. 1996.

[23] YAN, S., TU, Y. (1997) *Multifleet Routing and Multistop Flight Scheduling Perturbation*. EJOR, Vol 103, p. 155-169

On-line

1. Site do Anglo – www.cursoanglo.com.br
2. Site Apontador – www.apontador.com.br
3. Site da Fuvest – www.fuvest.br
4. Site Google – www.google.com

ANEXOS

Anexo A – Lista de Locais de Exame da Segunda Fase Fornecida pela Fuvest

- * 1- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDARES 1-2 / R ANTONIO MACEDO, 505 / PQ S JORGE / METRO CARRAO, SAO PAULO , CEP 03087-040
- * 2- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDARES 3-4 / R ANTONIO MACEDO, 505 / PQ S JORGE / METRO CARRAO, SAO PAULO , CEP 03087-040
- * 3- UNIP - CAMPUS ANALIA FRANCO / ANDARES 1-2 /* AV VEREADOR ABEL FERREIRA, 1100 /* JD ANALIA FRANCO, SAO PAULO , CEP 03340-000
- * 4- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDAR 5 / R ANTONIO MACEDO, 505 / PQ S JORGE / METRO CARRAO, SAO PAULO , CEP 03087-040
- * 5- UNIP - CAMPUS ANALIA FRANCO / TERREO / AV VEREADOR ABEL FERREIRA, 1100 / JD ANALIA FRANCO, SAO PAULO , CEP 03340-000
- * 6- EE ALEXANDRE DE GUSMAO / R CISPLATINA, 298 / IPIRANGA, SAO PAULO , CEP 04211-040
- * 7- COL E FAC RADIAL-JABAQUARA-UNID J-AND 2 / AV JABAQUARA, 1870 / METRO SAUDE, SAO PAULO , CEP 04046-300
- * 8- COL E FAC RADIAL-JABAQUARA-UNID J-AND 3-4 / AV JABAQUARA, 1870 / METRO SAUDE, SAO PAULO , CEP 04046-300
- * 9- FACULDADE DE BELAS ARTES DE SAO PAULO / R DR ALVARO ALVIM, 76 / V MARIANA, SAO PAULO , CEP 04018-010
- * 10- UNIP - CAMPUS VERGUEIRO / R APENINOS, 267 / ACLIMACAO, SAO PAULO , CEP 01533-000
- * 11- COLEGIO BATISTA BRASILEIRO / R DR HOMEM DE MELLO, 537 / PERDIZES, SAO PAULO , CEP 05007-001
- * 12- UNIP - CAMPUS MARQUES / ANDARES 1-2 / AV MARQUES DE S VICENTE, 3001 / AGUA BRANCA, SAO PAULO , CEP 05036-040
- * 13- UNIP - CAMPUS MARQUES / ANDAR 3 / AV MARQUES DE S VICENTE, 3001 / AGUA BRANCA, SAO PAULO , CEP 05036-040
- * 14- UNIBAN - CAMPUS MARTE / SALAS 1-12 / AV BRAS LEME, 3029 - SANTANA / CAMPO DE MARTE, SAO PAULO , CEP 02022-011
- * 15- UNIBAN - CAMPUS MARTE / SALAS 13-18 / AV BRAS LEME, 3029 - SANTANA / CAMPO DE MARTE, SAO PAULO , CEP 02022-011
- * 16- FACULDADE RADIAL - UNIDADE G / R PROMOTOR GABRIEL NETUZZI PEREZ, 108 / SANTO AMARO, SAO PAULO , CEP 04743-020
- * 17- EE OSWALDO ARANHA / AV PORTUGAL, 859 / BROOKLIN, SAO PAULO , CEP 04559-002
- * 18- USP / FACULDADE DE EDUCACAO / AV DA UNIVERSIDADE, 308 / CID UNIVERSITARIA, SAO PAULO , CEP 05508-900
- * 19- USP / POLITECNICA - BIENIO / ANDAR 2 / AV PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 128 / CID UNIVERSITARIA, SAO PAULO , CEP 05508-900
- * 20- USP / POLITECNICA - BIENIO / ANDAR 1 / AV PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 128 / CID UNIVERSITARIA, SAO PAULO , CEP 05508-900
- * 21- USP / POLITECNICA - CIVIL / AV PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 83 / CID UNIVERSITARIA, SAO PAULO , CEP 05508-900
- * 22- UNIBAN - CAMPUS OSASCO / A2 / AV DOS AUTONOMISTAS, 1325 (R EMILIO CARLOS) / , OSASCO , CEP 06020-015
- * 23- UNIBAN - CAMPUS OSASCO / A1 / AV DOS AUTONOMISTAS, 1325 (R EMILIO CARLOS) / , OSASCO , CEP 06020-015
- * 24- EE CONSELHEIRO CRISPINIANO / AV ARMINDA DE LIMA, 75 / CENTRO, GUARULHOS , CEP 07095-010
- * 25- EE DR AMERICO BRASILIENSE / PRACA DO IV CENTENARIO, S/N / CENTRO, SANTO ANDRE , CEP 09015-080

-
- * 26- EE JOAO RAMALHO / R JOSE BONIFACIO, 102 / CENTRO, S BERNARDO CAMPO , CEP 09721-160
 - * 27- COLEGIO DIVINO SALVADOR / R GENERAL CARNEIRO, 105 / VILA ARENS, JUNDIAI , CEP 13202-590
 - * 28- ETE ARISTOTELES FERREIRA / AV DR EPITACIO PESSOA, 466 / APARECIDA, SANTOS , CEP 11030-600
 - * 29- EE JOAO CURSINO / AV ENG FRANCISCO JOSE LONGO, 782 / SAO DIMAS, S JOSE DOS CAMPOS , CEP 12245-001
 - * 30- EE PROF OLIMPIO CATAO / PRACA AFONSO PENA, S/N / CENTRO, S JOSE DOS CAMPOS , CEP 12210-090
 - * 31- UNISO / RODOVIA RAPOSO TAVARES, KM 92,5 / CID UNIVERSITARIA, SOROCABA , CEP 18023-000
 - * 32- ESALQ / USP / AV PADUA DIAS, 11 / AGRONOMIA, PIRACICABA , CEP 13418-900
 - * 33- CEFAM - PIRASSUNUNGA / R PADRE ANTONIO VAN NESS, 1925 / ROSARIO, PIRASSUNUNGA , CEP 13634-000
 - * 34- EE PROF SEBASTIAO DE OLIVEIRA ROCHA / R PADRE TEIXEIRA, 1260 / CENTRO, SAO CARLOS , CEP 13561-050
 - * 35- EE JESUINO DE ARRUDA / PRACA DNA MARIA GERTRUDES DE ARRUDA, S/N / V PRADO, SAO CARLOS , CEP 13572-210
 - * 36- EM PROF EZEQUIEL RAMOS / PCA CARLOS GOMES, 938 (R BOA VISTA) / BAIRRO BOA VISTA, SAO JOSE DO RIO PRETO , CEP 15025-010
 - * 37- TECMED / AV ARTHUR NONATO, 5531 / JD PANORAMA, SAO JOSE DO RIO PRETO , CEP 15091-180
 - * 38- ITE - FACULDADE DE DIREITO / R ANTONIO DA SILVA SOUTO, QUADRA 2, S/N / V FALCAO, BAURU , CEP 17050-510
 - * 39- EE FERNANDO COSTA / AV WASHINGTON LUIZ, 672 / CENTRO, PRESIDENTE PRUDENTE , CEP 19015-150
 - * 40- EE ADALBERTO NASCIMENTO / R ADALBERTO MAIA, 235 / TAQUARAL, CAMPINAS , CEP 13090-070
 - * 41- LICEU SALESIANO NOSSA SRA AUXILIADORA / R BARONESA GERALDO DE RESENDE, 330 / JD GUANABARA, CAMPINAS , CEP 13075-270
 - * 42- COTUCA - COLEGIO TECNICO DE CAMPINAS / R CULTO A CIENCIA, 177 / CENTRO, CAMPINAS , CEP 13020-060
 - * 43- EE OTONIEL MOTA / R PRUDENTE DE MORAIS, 764 / CENTRO, RIBEIRAO PRETO , CEP 14015-100
 - * 44- CEMEI PROF EDUARDO ROMUALDO DE SOUZA / R VISCONDE DE INHOMIRIM, 1001 / VILA VIRGINIA, RIBEIRAO PRETO , CEP 14030-498
 - * 45- EM D LUIZ DO AMARAL MOUSINHO / R TAMANDARE, 353 / CAMPOS ELISEOS, RIBEIRAO PRETO , CEP 14085-070
 - * 46- EE DONA SINHA JUNQUEIRA / R CONSELHEIRO DANTAS, 358 / VILA TIBERIO, RIBEIRAO PRETO , CEP 14050-400
 - * 47- ECA / USP - BLOCO B / AV PROF LUCIO MARTINS RODRIGUES, 443 / CID UNIVERSITARIA, SAO PAULO , CEP 05508-900

Anexo B - Lista de Escolas a serem atendidas.

| | |
|--|---|
| Origem - Unidade Tamarandé | |
| RUA TAMANDARÉ, 596 | |
| LIBERDADE, SÃO PAULO, CEP 01525-000 | |
| Escola 1- UNIP - CAMPUS TATUAPE / ANDARES 1-2-3-4-5 | Escola 10- FACULDADE RADIAL - UNIDADE G |
| RUA ANTONIO MACEDO, 505 / PO S JORGE | RUA PROMOTOR GABRIEL NETUZZI PEREZ, 108 |
| METRO CARRAO, SÃO PAULO, CEP 03087-040 | SANTO AMARO, SÃO PAULO, CEP 04743-020 |
| Escola 2- UNIP - CAMPUS ANALIA FRANCO / TERREO e ANDARES 1-2 | Escola 11- EE OSWALDO ARANHA |
| AV VEREADOR ABEL FERREIRA, 1100 | AVENIDA PORTUGAL, 859 |
| JD ANALIA FRANCO, SÃO PAULO, CEP 03340-000 | BROOKLIN, SÃO PAULO, CEP 04559-002 |
| Escola 3- EE ALEXANDRE DE GUSMAO | Escola 12- USP / FACULDADE DE EDUCACAO |
| RUA CISPLATINA, 298 | AVENIDA DA UNIVERSIDADE, 308 |
| IPIRANGA, SÃO PAULO, CEP 04211-040 | CID UNIVERSITARIA, SÃO PAULO, CEP 05508-900 |
| Escola 4- COL E FAC RADIAL-JABAQUARA-UNID J-AND 2-3-4 | Escola 13- USP / ESCOLA POLI TECNICA - BIÊNIO e CIVIL |
| AVENIDA JABAQUARA, 1870 | AVENIDA PROF ALMEIDA PRADO, TRAV 2, 128 |
| METRO SAUDE, SÃO PAULO, CEP 04046-300 | CID UNIVERSITARIA, SÃO PAULO, CEP 05508-900 |
| Escola 5- FACULDADE DE BELAS ARTES DE SÃO PAULO | Escola 14- UNIBAN - CAMPUS OSASCO |
| RUA DR ALVARO ALVIM, 76 | AV DOS AUTONOMISTAS, 1325 (R EMILIO CARLOS) |
| V MARIANA, SÃO PAULO, CEP 04018-010 | , OSASCO, CEP 06020-015 |
| Escola 6- UNIP - CAMPUS VERGUEIRO | Escola 15- EE CONSELHEIRO CRISPINIANO |
| RUA APENINOS, 267 | AVENIDA ARMINDA DE LIMA, 75 |
| ACLIACAO, SÃO PAULO, CEP 01533-000 | CENTRO, GUARULHOS, CEP 07095-010 |
| Escola 7- COLEGIO BATISTA BRASILEIRO | Escola 16- EE DR AMERICO BRASILENSE |
| RUA DR HOMEM DE MELLO, 537 | PRACA DO IV CENTENARIO, S/N |
| PERDIZES, SÃO PAULO, CEP 05007-001 | CENTRO, SANTO ANDRE, CEP 09015-080 |
| Escola 8- UNIP - CAMPUS MARQUES / ANDARES 1-2-3 | Escola 17- EE JOAO RAMALHO |
| AV MARQUES DE S VICENTE, 3001 | RUA JOSE BONIFACIO, 102 |
| AGUA BRANCA, SÃO PAULO, CEP 05036-040 | CENTRO, S BERNARDO CAMPO, CEP 09721-160 |
| Escola 9- UNIBAN - CAMPUS MARTE / SALAS 1-18 | Escola 18- ECA / USP - BLOCO B |
| AVENIDA BRAS LEME, 3029 - SANTANA | AV PROF LUCIO MARTINS RODRIGUES, 443 |
| CAMPO DE MARTE, SÃO PAULO, CEP 02022-011 | CID UNIVERSITARIA, SÃO PAULO, CEP 05508-900 |

Anexo C -Teste de Hipótese de Dados Emparelhados

Dada a Tabela 4-3, ao nível de significância de 5%, pode-se concluir que as diferenças entre os valores não são significantes?

Solução: Considerando $\mu_d = \mu_x - \mu_y$, deve-se testar as hipóteses:

$$H_0, \quad \mu_d = 0$$

$$H_1, \quad \mu_d \neq 0$$

Considerando as diferenças $d_i = x_i - y_i$, as quais, juntamente com seus quadrados, são representadas na Tabela 0-1:

| i | De | Para | Distância (em Km) | | Diferenças | |
|----|-----------|-----------|---------------------|------------------|-------------|-------------|
| | | | Apontador (x_i) | Medida (y_i) | d_i | d_i^2 |
| 1 | Origem | Escola 5 | 4,5 | 4,1 | 0,4 | 0,2 |
| 2 | Escola 5 | Escola 11 | 6,6 | 6,2 | 0,4 | 0,2 |
| 3 | Escola 11 | Escola 12 | 10,9 | 10,2 | 0,7 | 0,5 |
| 4 | Escola 12 | Escola 13 | 3,0 | 2,9 | 0,1 | 0,0 |
| 5 | Escola 13 | Escola 18 | 1,9 | 2,0 | (0,1) | 0,0 |
| 6 | Escola 18 | Escola 13 | 1,5 | 1,4 | 0,1 | 0,0 |
| 7 | Escola 13 | Escola 12 | 3,8 | 3,5 | 0,3 | 0,1 |
| 8 | Escola 12 | Escola 11 | 8,5 | 8,8 | (0,3) | 0,1 |
| 9 | Escola 11 | Escola 5 | 7,4 | 7,4 | 0,0 | 0,0 |
| 10 | Escola 5 | Origem | 4,7 | 4,6 | 0,1 | 0,0 |
| | | | | | 1,70 | 1,03 |

Tabela 0-1: Dados para Teste de Hipótese

Pode-se portanto calcular.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{1,7}{10} = 0,17$$

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{1,03 - \frac{(1,7)^2}{10}}{9} \cong 0,0823$$

$$s_d = \sqrt{0,0823} \cong 0,2869$$

$$t_{n-1} = t_9 = \frac{\bar{d} - 0}{s_d / \sqrt{n}} \cong 1,874$$

Mas, como $t_{9,5\%} = 1,833$, aceita-se a hipótese H_0 ao nível de 5% de significância.

Portanto, a esse nível de significância, as diferenças entre os valores obtidos e medidos não são significantes.

 Anexo D: Relatório para a Solução Atual Encontrada

What'sBest! 5.0 Status Report

Solver memory allocated: 614400

Integer tolerance set to: 0.050000

Final linear feasibility tolerance: 0.01000000

Relative integrality tolerance: 0.0100000000000000

Model Type: LINEAR / INTEGER

The smallest and largest coefficients in the model were:

0.80000000 20000.000

The smallest coefficient occurred in constraint cell: Plan1!AE3
on optimizable cell: Plan1!I3

The largest coefficient occurred in constraint cell: Plan1!K47
on optimizable cell: <RHS>

| CLASSIFICATION STATISTICS | Current / | Maximum |
|---------------------------|-----------|---------|
| Numeric | 100002 / | 128000 |
| Adjustable | 450 / | 32000 |
| Constraints | 16000 / | 16000 |
| Integers | 450 / | 3200 |
| Optimizable | 59360 | |
| Nonlinear | 0 / | 0 |
| Coefficients | 731323 | |

Best integer value: 77.7 @ 101245 tries. Theoretical limit: 77.7

Solution Status: GLOBALLY OPTIMAL.

Solution Time: 19 Hours 42 Minutes 52 Seconds

End of report.

 Anexo E: Relatório para a Solução Proposta

What'sBest! 5.0 Status Report

Solver memory allocated: 691200

Integer tolerance set to: 0.050000
 Final linear feasibility tolerance: 0.01000000
 Relative integrality tolerance: 0.0100000000000000
 Branching priority: Binary

Model Type: LINEAR / INTEGER

The smallest and largest coefficients in the model were:

0.80000000 2331.0000

The smallest coefficient occurred in constraint cell: Plan1!I77
 on optimizable cell: Plan1!AE25

The largest coefficient occurred in constraint cell: Plan1!L46
 on optimizable cell: <RHS>

| CLASSIFICATION STATISTICS | Current / | Maximum |
|---------------------------|-----------|---------|
| Numeric | 101658 / | 128000 |
| Adjustable | 722 / | 32000 |
| Constraints | 16000 / | 16000 |
| Integers | 722 / | 3200 |
| Optimizable | 58724 | |
| Nonlinear | 0 / | 0 |
| Coefficients | 866167 | |

Best integer value: 143 @ 251258 tries. Theoretical limit: 143

Solution Status: GLOBALLY OPTIMAL.

Solution Time: 49 Hours 38 Minutes 15 Seconds

End of report.

Anexo F - Algoritmo Completo em Linguagem de VBA, elaborado pelo autor.

```
'Posição onde começam os números de entrada
m = 100
'im é uma variável que indica a posição da matriz de variáveis X para o veículo k (no caso: para k=1 => im=3, para k=2 => im = 25)
Do While (im<=25)
im = 3
'Leitura dos números de entrada na linha m
Do While (m <= 262223)
n = 1
var01 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var02 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var03 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var04 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var05 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var06 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var07 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var08 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var09 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var10 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var11 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var12 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var13 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var14 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var15 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var16 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
var17 = im + Cells(m, n).Value
n = n + 1
'A seguir deve-se começar a criação das variáveis que indicarão a linha (R) e coluna (C) onde está a variável X que entrará nas somas de subrotas
'combinações com var01
r01c02 = "R" & var01 & "C" & var02
r02c01 = "R" & var02 & "C" & var01
r01c03 = "R" & var01 & "C" & var03
r03c01 = "R" & var03 & "C" & var01
```

r01c04 = "R" & var01 & "C" & var04
r04c01 = "R" & var04 & "C" & var01
r01c05 = "R" & var01 & "C" & var05
r05c01 = "R" & var05 & "C" & var01
r01c06 = "R" & var01 & "C" & var06
r06c01 = "R" & var06 & "C" & var01
r01c07 = "R" & var01 & "C" & var07
r07c01 = "R" & var07 & "C" & var01
r01c08 = "R" & var01 & "C" & var08
r08c01 = "R" & var08 & "C" & var01

r01c09 = "R" & var01 & "C" & var09
r09c01 = "R" & var09 & "C" & var01
r01c10 = "R" & var01 & "C" & var10
r10c01 = "R" & var10 & "C" & var01
r01c11 = "R" & var01 & "C" & var11
r11c01 = "R" & var11 & "C" & var01
r01c12 = "R" & var01 & "C" & var12
r12c01 = "R" & var12 & "C" & var01
r01c13 = "R" & var01 & "C" & var13
r13c01 = "R" & var13 & "C" & var01
r01c14 = "R" & var01 & "C" & var14
r14c01 = "R" & var14 & "C" & var01
r01c15 = "R" & var01 & "C" & var15
r15c01 = "R" & var15 & "C" & var01
r01c16 = "R" & var01 & "C" & var16
r16c01 = "R" & var16 & "C" & var01
r01c17 = "R" & var01 & "C" & var17
r17c01 = "R" & var17 & "C" & var01

'combinações com var02
r02c03 = "R" & var02 & "C" & var03
r03c02 = "R" & var03 & "C" & var02
r02c04 = "R" & var02 & "C" & var04
r04c02 = "R" & var04 & "C" & var02
r02c05 = "R" & var02 & "C" & var05
r05c02 = "R" & var05 & "C" & var02
r02c06 = "R" & var02 & "C" & var06
r06c02 = "R" & var06 & "C" & var02
r02c07 = "R" & var02 & "C" & var07
r07c02 = "R" & var07 & "C" & var02
r02c08 = "R" & var02 & "C" & var08
r08c02 = "R" & var08 & "C" & var02
r02c09 = "R" & var02 & "C" & var09
r09c02 = "R" & var09 & "C" & var02
r02c10 = "R" & var02 & "C" & var10
r10c02 = "R" & var10 & "C" & var02
r02c11 = "R" & var02 & "C" & var11
r11c02 = "R" & var11 & "C" & var02
r02c12 = "R" & var02 & "C" & var12
r12c02 = "R" & var12 & "C" & var02
r02c13 = "R" & var02 & "C" & var13

r13c02 = "R" & var13 & "C" & var02
r02c14 = "R" & var02 & "C" & var14
r14c02 = "R" & var14 & "C" & var02
r02c15 = "R" & var02 & "C" & var15
r15c02 = "R" & var15 & "C" & var02
r02c16 = "R" & var02 & "C" & var16
r16c02 = "R" & var16 & "C" & var02
r02c17 = "R" & var02 & "C" & var17
r17c02 = "R" & var17 & "C" & var02
'combinações com var03
r03c04 = "R" & var03 & "C" & var04
r04c03 = "R" & var04 & "C" & var03
r03c05 = "R" & var03 & "C" & var05
r05c03 = "R" & var05 & "C" & var03
r03c06 = "R" & var03 & "C" & var06
r06c03 = "R" & var06 & "C" & var03
r03c07 = "R" & var03 & "C" & var07
r07c03 = "R" & var07 & "C" & var03
r03c08 = "R" & var03 & "C" & var08
r08c03 = "R" & var08 & "C" & var03
r03c09 = "R" & var03 & "C" & var09
r09c03 = "R" & var09 & "C" & var03
r03c10 = "R" & var03 & "C" & var10
r10c03 = "R" & var10 & "C" & var03
r03c11 = "R" & var03 & "C" & var11
r11c03 = "R" & var11 & "C" & var03
r03c12 = "R" & var03 & "C" & var12
r12c03 = "R" & var12 & "C" & var03
r03c13 = "R" & var03 & "C" & var13
r13c03 = "R" & var13 & "C" & var03
r03c14 = "R" & var03 & "C" & var14
r14c03 = "R" & var14 & "C" & var03
r03c15 = "R" & var03 & "C" & var15
r15c03 = "R" & var15 & "C" & var03
r03c16 = "R" & var03 & "C" & var16
r16c03 = "R" & var16 & "C" & var03
r03c17 = "R" & var03 & "C" & var17
r17c03 = "R" & var17 & "C" & var03
'combinações com var04
r04c05 = "R" & var04 & "C" & var05
r05c04 = "R" & var05 & "C" & var04
r04c06 = "R" & var04 & "C" & var06
r06c04 = "R" & var06 & "C" & var04
r04c07 = "R" & var04 & "C" & var07
r07c04 = "R" & var07 & "C" & var04
r04c08 = "R" & var04 & "C" & var08
r08c04 = "R" & var08 & "C" & var04
r04c09 = "R" & var04 & "C" & var09
r09c04 = "R" & var09 & "C" & var04
r04c10 = "R" & var04 & "C" & var10
r10c04 = "R" & var10 & "C" & var04

r04c11 = "R" & var04 & "C" & var11
r11c04 = "R" & var11 & "C" & var04
r04c12 = "R" & var04 & "C" & var12
r12c04 = "R" & var12 & "C" & var04
r04c13 = "R" & var04 & "C" & var13
r13c04 = "R" & var13 & "C" & var04
r04c14 = "R" & var04 & "C" & var14
r14c04 = "R" & var14 & "C" & var04
r04c15 = "R" & var04 & "C" & var15
r15c04 = "R" & var15 & "C" & var04
r04c16 = "R" & var04 & "C" & var16
r16c04 = "R" & var16 & "C" & var04
r04c17 = "R" & var04 & "C" & var17
r17c04 = "R" & var17 & "C" & var04
'combinações com var5
r05c06 = "R" & var05 & "C" & var06
r06c05 = "R" & var06 & "C" & var05
r05c07 = "R" & var05 & "C" & var07
r07c05 = "R" & var07 & "C" & var05
r05c08 = "R" & var05 & "C" & var08
r08c05 = "R" & var08 & "C" & var05
r05c09 = "R" & var05 & "C" & var09
r09c05 = "R" & var09 & "C" & var05
r05c10 = "R" & var05 & "C" & var10
r10c05 = "R" & var10 & "C" & var05
r05c11 = "R" & var05 & "C" & var11
r11c05 = "R" & var11 & "C" & var05
r05c12 = "R" & var05 & "C" & var12
r12c05 = "R" & var12 & "C" & var05
r05c13 = "R" & var05 & "C" & var13
r13c05 = "R" & var13 & "C" & var05
r05c14 = "R" & var05 & "C" & var14
r14c05 = "R" & var14 & "C" & var05
r05c15 = "R" & var05 & "C" & var15
r15c05 = "R" & var15 & "C" & var05
r05c16 = "R" & var05 & "C" & var16
r16c05 = "R" & var16 & "C" & var05
r05c17 = "R" & var05 & "C" & var17
r17c05 = "R" & var17 & "C" & var05
'combinações com var6
r06c07 = "R" & var06 & "C" & var07
r07c06 = "R" & var07 & "C" & var06
r06c08 = "R" & var06 & "C" & var08
r08c06 = "R" & var08 & "C" & var06
r06c09 = "R" & var06 & "C" & var09
r09c06 = "R" & var09 & "C" & var06
r06c10 = "R" & var06 & "C" & var10
r10c06 = "R" & var10 & "C" & var06
r06c11 = "R" & var06 & "C" & var11
r11c06 = "R" & var11 & "C" & var06
r06c12 = "R" & var06 & "C" & var12

r12c06 = "R" & var12 & "C" & var06
r06c13 = "R" & var06 & "C" & var13
r13c06 = "R" & var13 & "C" & var06
r06c14 = "R" & var06 & "C" & var14
r14c06 = "R" & var14 & "C" & var06
r06c15 = "R" & var06 & "C" & var15
r15c06 = "R" & var15 & "C" & var06
r06c16 = "R" & var06 & "C" & var16
r16c06 = "R" & var16 & "C" & var06
r06c17 = "R" & var06 & "C" & var17
r17c06 = "R" & var17 & "C" & var06
'combinações com var07
r07c08 = "R" & var07 & "C" & var08
r08c07 = "R" & var08 & "C" & var07
r07c09 = "R" & var07 & "C" & var09
r09c07 = "R" & var09 & "C" & var07
r07c10 = "R" & var07 & "C" & var10
r10c07 = "R" & var10 & "C" & var07
r07c11 = "R" & var07 & "C" & var11
r11c07 = "R" & var11 & "C" & var07
r07c12 = "R" & var07 & "C" & var12
r12c07 = "R" & var12 & "C" & var07
r07c13 = "R" & var07 & "C" & var13
r13c07 = "R" & var13 & "C" & var07
r07c14 = "R" & var07 & "C" & var14
r14c07 = "R" & var14 & "C" & var07
r07c15 = "R" & var07 & "C" & var15
r15c07 = "R" & var15 & "C" & var07
r07c16 = "R" & var07 & "C" & var16
r16c07 = "R" & var16 & "C" & var07
r07c17 = "R" & var07 & "C" & var17
r17c07 = "R" & var17 & "C" & var07
'combinações com var08
r08c09 = "R" & var08 & "C" & var09
r09c08 = "R" & var09 & "C" & var08
r08c10 = "R" & var08 & "C" & var10
r10c08 = "R" & var10 & "C" & var08
r08c11 = "R" & var08 & "C" & var11
r11c08 = "R" & var11 & "C" & var08
r08c12 = "R" & var08 & "C" & var12
r12c08 = "R" & var12 & "C" & var08
r08c13 = "R" & var08 & "C" & var13
r13c08 = "R" & var13 & "C" & var08
r08c14 = "R" & var08 & "C" & var14
r14c08 = "R" & var14 & "C" & var08
r08c15 = "R" & var08 & "C" & var15
r15c08 = "R" & var15 & "C" & var08
r08c16 = "R" & var08 & "C" & var16
r16c08 = "R" & var16 & "C" & var08
r08c17 = "R" & var08 & "C" & var17
r17c08 = "R" & var17 & "C" & var08

'combinações com var09
r09c10 = "R" & var09 & "C" & var10
r10c09 = "R" & var10 & "C" & var09
r09c11 = "R" & var09 & "C" & var11
r11c09 = "R" & var11 & "C" & var09
r09c12 = "R" & var09 & "C" & var12
r12c09 = "R" & var12 & "C" & var09
r09c13 = "R" & var09 & "C" & var13
r13c09 = "R" & var13 & "C" & var09
r09c14 = "R" & var09 & "C" & var14
r14c09 = "R" & var14 & "C" & var09
r09c15 = "R" & var09 & "C" & var15
r15c09 = "R" & var15 & "C" & var09
r09c16 = "R" & var09 & "C" & var16
r16c09 = "R" & var16 & "C" & var09
r09c17 = "R" & var09 & "C" & var17
r17c09 = "R" & var17 & "C" & var09
'combinações com var10
r10c11 = "R" & var10 & "C" & var11
r11c10 = "R" & var11 & "C" & var10
r10c12 = "R" & var10 & "C" & var12
r12c10 = "R" & var12 & "C" & var10
r10c13 = "R" & var10 & "C" & var13
r13c10 = "R" & var13 & "C" & var10
r10c14 = "R" & var10 & "C" & var14
r14c10 = "R" & var14 & "C" & var10
r10c15 = "R" & var10 & "C" & var15
r15c10 = "R" & var15 & "C" & var10
r10c16 = "R" & var10 & "C" & var16
r16c10 = "R" & var16 & "C" & var10
r10c17 = "R" & var10 & "C" & var17
r17c10 = "R" & var17 & "C" & var10
'combinações com var11
r11c12 = "R" & var11 & "C" & var12
r12c11 = "R" & var12 & "C" & var11
r11c13 = "R" & var11 & "C" & var13
r13c11 = "R" & var13 & "C" & var11
r11c14 = "R" & var11 & "C" & var14
r14c11 = "R" & var14 & "C" & var11
r11c15 = "R" & var11 & "C" & var15
r15c11 = "R" & var15 & "C" & var11
r11c16 = "R" & var11 & "C" & var16
r16c11 = "R" & var16 & "C" & var11
r11c17 = "R" & var11 & "C" & var17
r17c11 = "R" & var17 & "C" & var11
'combinações com var12
r12c13 = "R" & var12 & "C" & var13
r13c12 = "R" & var13 & "C" & var12
r12c14 = "R" & var12 & "C" & var14
r14c12 = "R" & var14 & "C" & var12
r12c15 = "R" & var12 & "C" & var15

```

r15c12 = "R" & var15 & "C" & var12
r12c16 = "R" & var12 & "C" & var16
r16c12 = "R" & var16 & "C" & var12
r12c17 = "R" & var12 & "C" & var17
r17c12 = "R" & var17 & "C" & var12
'combinações com var13
r13c14 = "R" & var13 & "C" & var14
r14c13 = "R" & var14 & "C" & var13
r13c15 = "R" & var13 & "C" & var15
r15c13 = "R" & var15 & "C" & var13
r13c16 = "R" & var13 & "C" & var16
r16c13 = "R" & var16 & "C" & var13
r13c17 = "R" & var13 & "C" & var17
r17c13 = "R" & var17 & "C" & var13
'combinações com var14
r14c15 = "R" & var14 & "C" & var15
r15c14 = "R" & var15 & "C" & var14
r14c16 = "R" & var14 & "C" & var16
r16c14 = "R" & var16 & "C" & var14
r14c17 = "R" & var14 & "C" & var17
r17c14 = "R" & var17 & "C" & var14
'combinações com var15
r15c16 = "R" & var15 & "C" & var16
r16c15 = "R" & var16 & "C" & var15
r15c17 = "R" & var15 & "C" & var17
r17c15 = "R" & var17 & "C" & var15
'combinações com var16
r16c17 = "R" & var16 & "C" & var17
r17c16 = "R" & var17 & "C" & var16

'A seguir são retornadas as somas de sub rotas utilizando as variáveis criadas acima
'soma para evitar subrota de 2
If (var03 = im) Then
Cells(m, n) = "=" & r01c02 & "+" & r02c01 & ""
Else
'soma para evitar subrota de 3
If (var04 = im) Then
Cells(m, n) = "=" & r01c02 & " " & r02c01 & " " & r01c03 & " " & r03c01 & " " & r02c03 & " " & r03c02 & ""
Else
'soma para evitar subrota de 4
If (var05 = im) Then
Cells(m, n) = "=" & r01c02 & "+" & r02c01 & "+" & r01c03 & "+" & r03c01 & "+" & r01c04 & "+" & r04c01 & "+" & r02c03 & "+" & r03c02 &
"+" & r02c04 & "+" & r04c02 & "+" & r03c04 & "+" & r04c03 & ""
n = n + 1
Else
'soma para evitar subrota de 5
If (var06 = im) Then
Cells(m, n) = "=" & r01c02 & "+" & r02c01 & "+" & r01c03 & "+" & r03c01 & "+" & r01c04 & "+" & r04c01 & "+" & r01c05 & "+" & r05c01 &
"+" & r02c03 & "+" & r03c02 & "+" & r02c04 & "+" & r04c02 & "+" & r02c05 & "+" & r05c02 & "+" & r03c04 & "+" & r04c03 & "+" & r03c05 &
"+" & r05c03 & "+" & r04c05 & "+" & r05c04 & ""
n = n + 1

```